ANALÍZIS(1) Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2011. ápr. 14. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}} + \dfrac{1}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{x^4+2x^3+x^2-2x-2}{(x^2+1)(x+1)}$

a.) $\boxed{6}$ $f(x) = \dfrac{1}{|x-3|} + \dfrac{1}{x-3}$ 1

Szakadási hely: $x=3$ 1

$f(3+0) = \lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{2}{x-3} = \infty$ (ahol $x-3 \to +0$)

$f(3-0) = \lim\limits_{x\to 3-0} \underbrace{\left(-\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-3}\right)}_{\equiv 0} = 0$

$\Rightarrow$ másodfajú szakadás 4

b.) Szakadási hely: $x=-1$ 1

$\boxed{7}$ $(x^4+2x^3+x^2-2x-2) : (x+1) = x^3+x^2-2$

$-(x^4+x^3)$

x^3+x^2-2x-2

$-(x^3+x^2)$

$-2x-2$

$-(-2x-2)$

0

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x+1}\,\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-2}{x^2+1} = -1$ 2

4

2. feladat (10 pont)

Létezik-e a következő határérték?
Ha igen, határozza meg! Ha nem, igazolja, hogy nem létezik.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(2x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3x} \sin(2x)$

$\boxed{7}$ a.) Nem létezik: $f(x) := \sin 2x$

Pl. $x_n^{(1)} := n\dfrac{\pi}{2} \to \infty$ $f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi = 0 \to 0$

$x_n^{(2)} := \dfrac{\pi}{4} + n\pi \to \infty$ $f(x_n^{(2)}) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1 \neq 0$

$\xrightarrow[\text{átviteli elv}]{}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \sin 2x \nexists$

an1z2110414/1.

b.) $\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{3x}}_{\to 0} \underbrace{\sin 2x}_{\text{korlátos}} = 0$

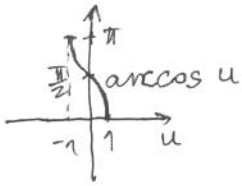
3. feladat (14 pont)

$$f(x) = 3\pi - \arccos(3-2x)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!

c) $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$



a.) $\boxed{7}$ $-1 \le 3-2x \le 1$ .... $1 \le x \le 2$

$D_f = [1,2]$ (2)

$\arccos(3-2x) \in [0,\pi]$ ... $R_f = [2\pi, 3\pi]$ (2)

$f'(x) = 0 - \dfrac{-1}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}(-2)$ (3) $\qquad D_{f'} = (1,2)$

b.) $\boxed{2}$ $f'(x) < 0$ $(1,2)$-őn és f folytonos $[1,2]$-on

$\Rightarrow f$ szig. mon. csökken $[1,2]$-őn $\Rightarrow \exists f^{-1}$ D_f-en.

c.) $y = 3\pi - \arccos(3-2x) \Rightarrow 3\pi - y = \arccos(3-2x)$

$\Rightarrow 3-2x = \cos(3\pi - y)$ $(= -\cos y)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(3 - \cos(3\pi - y))$ $\qquad x \leftrightarrow y$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(3 - \cos(3\pi - x))$ (3) $\left(= \frac{1}{2}(3+\cos x)\right)$

$D_{f^{-1}} = R_f$ (2) $= [2\pi, 3\pi]$

4. feladat (13 pont)

$$f(x) = \sqrt[5]{x^4}\ \sin\left(3\sqrt[5]{x}\right)$$

$f'(x) = ?$ ($f'(0)$ értékét a definícióval határozza meg!)

Ha $x \neq 0$:

$f'(x) = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} \sin 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^4}\left(\cos 3\sqrt[5]{x}\right)\cdot 3\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ (5)

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ (2) $= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{h^4}\sin 3\sqrt[5]{h}}{h} =$ (2)

$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt[5]{h^4}}{\sqrt[5]{h^4}}}_{=1}\ \underbrace{\frac{\sin 3\sqrt[5]{h}}{\sqrt[5]{h}\cdot 3}}_{\to 1}\cdot 3 = 3$ (4)

5. feladat (15 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}, & \text{ha } x < 2 \\ (1+x^2)^x, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to 2-0} f(x) = ?$
Folytonos-e a függvény $x = 2$-ben?
Differenciálható-e a függvény $x = 2$-ben?

b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

a.) $\boxed{6}$ $f(2-0) = \lim_{x\to 2-0}\operatorname{arctg}\underbrace{\left(\frac{1}{2-x}\right)}_{\to\infty}$ ($2-x \to +0$) $= \frac{\pi}{2}$ (2)

$f(2+0) = f(2) = 25$ (1) $\neq f(2-0) \Rightarrow f$ nem folyt. $x=2$-ben (1)

$\Rightarrow \nexists\, f'(2)$ (2)

b.) $(1+x^2)^x = e^{x\ln(1+x^2)}$ (2)

$x>2$: $f'(x) = \left((1+x^2)^x\right)' = e^{x\ln(1+x^2)}\cdot\left(x\cdot\ln(1+x^2)\right)' =$ (2)

$= (1+x^2)^x\left(1\cdot\ln(1+x^2) + x\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)$ (2)

$x<2$: $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}\ \frac{-1}{(2-x)^2}(-1)$ (3)

an1z2 110414/3.

6. feladat (22 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x+2)\, \mathrm{e}^{-5x}$ *b)* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin(3x^2)}{\sin^2(2x)}$ *d)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\mathrm{ch}\,(4x+2)}{\mathrm{sh}(4x-1)}$

a.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{(3x+2)e^{-5x}}_{\infty\cdot 0} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{3x+2}{e^{5x}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{5\underbrace{e^{5x}}_{\to\infty}} = 0$$

b.) $\boxed{4}$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2}}{x}}_{=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1} \sqrt{1-\frac{2}{x}} = -1\cdot 1 = -1$$

c.) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\arcsin 3x^2}{\sin^2 2x}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\cdot 6x}{2\cdot \sin 2x \cos 2x\cdot 2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 1\cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$= 3\,\frac{2x}{\sin 2x} \to 3\cdot 1 = 3$$

d.) $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ch(4x+2)}{sh(4x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x+2}+e^{-(4x+2)}}{e^{4x-1}-e^{-(4x-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^{4x}}{e^{4x}}}_{=1} \frac{e^2+e^{-8x-2}}{e^{-1}-e^{-8x+1}} = \frac{e^2+0}{e^{-1}-0} = e^3$$

7. feladat (13 pont)

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)^3}$$

a) $f'(x) = ?$ Írja fel az $x_0 = -2$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét!

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

a.) É.T. : $x \neq -3$ (1)

$\boxed{9}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+3)^3 - (x-1)\cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{x+3-3(x-1)}{(x+3)^4} =$$ (3)

$$= \frac{-2x+6}{(x+3)^4}$$ (1) $x \neq -3$

$$y_é = f(-2) + f'(-2)(x+2) = -3 + 12(x+2)$$ (2) (2)

b.)

$\boxed{4}$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	+	$\nexists$	+	0	−
f	↗	szak. hely	↗	lok. max	↘

f szig. mon. nő $(-\infty,-3)$ illetve $(-3,3)$ intervallumon

f szig. mon. csökken a $(3,\infty)$ intervallumon.

an1z2 110411/5.

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{\ln(1+2x^2)} = ? \qquad b)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{(x^2-9)} = ?$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = ?$$

a.) $\boxed{5}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{\ln(1+2x^2)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{e^{3x^2}}\cdot 6x}{\underbrace{\frac{1}{1+2x^2}}_{1}\cdot 4x} = \frac{3}{2}$$

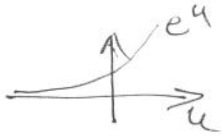
$\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$

b.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\sin(x-3)}{x-3}}_{1} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

c.) $\boxed{3}$

$$\lim_{x\to 2} e^{\overset{\to -\infty}{-\frac{1}{(x-2)^2}}} = 0$$



$\frac{1}{(x-2)^2} \to \infty$, mert $\frac{1}{+0}$ alakú

9. feladat (9 pont)

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

Hol konvex, hol konkáv a függvény? Van-e inflexiós pontja?

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (2) \qquad f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \quad (2)$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x)(1+x)}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl. pont	$\smile$	infl. pont	$\frown$

(5)