Valószínűségszámítás Műszaki informatikus BSc
2015. december 22.

1. A karácsonyfára 20 égőt raktunk fel, amelyek egymástól függetlenül $\lambda = 0.01$ paraméterű exponenciális eloszlású napig működnek. *Mekkora valószínűséggel történik meg az, hogy amíg a karácsonyfát feldíszítve hagyjuk, azaz 14 napon keresztül egyetlen égő sem fog tönkremenni? *Mekkora annak a valószínűsége, hogy már a karácsonyi első három napon lesz olyan égő, ami kiég?
Megoldás: Jelölje a 20 egő élettertamát $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$, ahol $X_i \in E(0.01)$ függetlenek.
Az első kérdésre a választ a $\mathbf{P}\left(\min_{i=1,2,\ldots,20} X_i > 14\right)$ valószínűség, a másodikra a $1 - \mathbf{P}\left(\min_{i=1,2,\ldots,20} X_i > 3\right)$ valószínűség adja meg a választ.

$$\mathbf{P}\left(\min_{i=1,2,\ldots,20} X_i > 14\right) = \mathbf{P}(X_1 > 14, X_2 > 14, \ldots, X_{20} > 14) = \mathbf{P}(X_1 > 14) \cdot \mathbf{P}(X_2 > 14) \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}(X_{20} > 14) =$$
$$= (\mathbf{P}(X_1 > 14))^{20} = \left(e^{-\frac{14}{100}}\right)^{20} = 0.06081$$
$$1 - \mathbf{P}\left(\min_{i=1,2,\ldots,20} X_i > 3\right) = \mathbf{1} - (\mathbf{P}(X_1 > 3))^{20} = 1 - \left(e^{-\frac{3}{100}}\right)^{20} = 0.45119$$

2. Egy ládában 20 darab játékkocka van, melyek közül 19 teljesen szabályos, egy pedig hamis olyan értelemben, hogy vele 90%-os valószínűséggel dobható hatos. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és azt négyszer feldobva mindig hatost kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hamis kockát vettük ki előzőleg?
Megoldás: S szabályos kockát veszünk ki, $\mathbf{P}(S) = \frac{19}{20}$
H hamis kockát veszünk ki, $\mathbf{P}(H) = \frac{1}{20}$
N mindig hatost dobunk négyből, $\mathbf{P}(N \mid S) = \frac{1}{1296}, \mathbf{P}(N \mid H) = (\frac{9}{10})^4 = 0.6561$
Bayes tétellel
$$\mathbf{P}(H \mid N) = \frac{\mathbf{P}(N|H)\cdot\mathbf{P}(H)}{\mathbf{P}(N|H)\cdot\mathbf{P}(H)+\mathbf{P}(N|S)\cdot\mathbf{P}(S)} = \frac{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4}{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{1296}} = \frac{531441}{543316} = 0.97814$$

3. Egy kalapban 3 cetlire az 1,2 és 3 számjegyek vannak felírva. Egymás után kiveszünk két cédulát. Legyen X a két szám szorzata, Y a párosak száma. Számolja ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ feltételes várható értéket.
Megoldás: $R_X = \{2,3,6\}, R_Y = \{0,1\}$ az együttes eloszlásuk táblázata:

\ X Y \	2	3	6
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$\mathbf{P}(Y = 0 \mid X = 2) = 0, \mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 2) = 1 \Rightarrow \mathbf{E}(Y \mid X = 2) = 1$
$\mathbf{P}(Y = 0 \mid X = 3) = 1, \mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 3) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}(Y \mid X = 3) = 0$
$\mathbf{P}(Y = 0 \mid X = 6) = 0, \mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 6) = 1 \Rightarrow \mathbf{E}(Y \mid X = 6) = 1$
Tehát $R_{\mathbf{E}(Y|X)} = \{0,1\}, \mathbf{P}(\mathbf{E}(Y \mid X) = 1) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(\mathbf{E}(Y \mid X) = 0) = \frac{1}{3}$

4. A Csebisev egyenlőtlenség segítségével becsülje meg, hogy legalább hány megfigyelés kell ahhoz, hogy egy 7-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 90%-os valószínűséggel a várható érték 0,1 sugarú környezetébe essen?
Megoldás: Az átlagstatisztikáról tudjuk, hogy $\mathbf{E}\bar{X}_n = m, \sigma^2(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \leq \frac{49}{n}$.
A Csebisev-egyenlőtlenséget felírva:
$\mathbf{P}(|\bar{X}_n - m| \geq 0.1) \leq \frac{\frac{49}{n}}{0.1^2}$, azaz
$\mathbf{P}(|\bar{X}_n - m| < 0.1) \geq 1 - \frac{\frac{49}{n}}{0.1^2} \geq 0.9$
$0.1 \cdot 0.1^2 \geq \frac{49}{n} \Rightarrow n \geq \frac{49}{0.1\cdot 0.1^2} = 49000$
Tehát legalább 49000 megfigyelés szükséges ehhez!

5. Legyen az (X,Y) együttes eloszlása egyenletes az $A(-\frac{1}{2},0), B(\frac{1}{2},0)$ és $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontok által meghatározott H háromszögön, azaz

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} & \text{, ha } (x,y) \in H \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Számolja ki az X vetületi sűrűségfüggvényét és várható értékét!
Megoldás:

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4}{\sqrt{3}} dy = 4x + 2, x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$f_X(x) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x} \frac{4}{\sqrt{3}} dy = 2 - 4x, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{E}X = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 4x^2 + 2x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x - 4x^2 dx = \left[\tfrac{4x^3}{3} + x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[x^2 - \tfrac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = 0$$