Valószínűségszámítás (A4)
II. zh. 2014. 05. 05.

1.Egy exp(5) élettartamú izzótípus élettartamára végrehajtott 100 mérés átlaga legalább mekkora pontossággal közelíti a 0,2 elméleti átlagot - 0,9 biztonsági szintet feltételezve? Hány mérést kellene végrehajtani ahhoz, hogy a szóban forgó pontosság legalább 0,01 legyen?

2. Egy ellenállás várható értéke 0,4 Ω, szórása $1/\sqrt{3}$ Ω. 100 ilyen típusú ellenállást sorbakötünk.Mi a közelítő valószínűsége annak, hogy az eredő ellenállás 41,5 Ω és 42 Ω közé esik?

3. a) Az A(0,1) B(0,0) C(1,0) egyenlőszárú derékszögű háromszögön választunk egy P(X,Y) pontot kétdimenziós egyenletes eloszlás szerint. Határozza meg X illetve Y, $f(x)$ illetve $g(y)$ sűrűségfüggvényét!

b) Ezúttal úgy választunk egy Q(X,Y) pontot a síkon, hogy X-t illetve Y-t *függetlenül* választjuk (0,1)-ben az előző $f(x)$ illetve $g(y)$ sűrűségfüggvények szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy Q(X,Y) közelebb esik az origóhoz, mint 0,5?

x	$\boxed{\Phi(x)}$
0	0,500
0,1	0,540
0,2	0,579
0,3	0,618
0,4	0,655
0,5	0,691
0,6	0,726
0,7	0,758
0,8	0,788
0,9	0,816

x	$\boxed{\Phi(x)}$
1	0,841
1,1	0,864
1,2	0,885
1,3	0,903
1,4	0,919
1,5	0,933
1,6	0,945
1,7	0,955
1,8	0,964
1,9	0,971

x	$\boxed{\Phi(x)}$
2	0,977
2,1	0,982
2,2	0,986
2,3	0,989
2,4	0,992
2,5	0,994
2,6	0,995
2,7	0,997
2,8	0,997
2,9	0,998

A4. 2. ZH

2014-05-05

Megoldás

① $\exp(5) \Rightarrow M(X) = \frac{1}{5}, \quad D(X) = \frac{1}{5}$

2p

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}}{100} = \bar{x} \qquad |\bar{x} - 0{,}2| \text{ becslése}$$

u próba:

$$P\Big(\bar{x} - \underbrace{u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{pontosság}} \le m \le \bar{x} + \underbrace{u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{pontosság}}\Big) = 1 - p = 0{,}9$$

a) $u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = ?$ $\quad \sigma = \frac{1}{5}$, $n = 100$ 3p

$$2\,\Phi(u_p) - 1 = 0{,}9$$ 3p

$$\Phi(u_p) = \frac{1{,}9}{2} \overset{\text{tábl.}}{\Longrightarrow}$$

b) $n = ?$ $\quad$ pont $= 0.01$

$$u_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0{,}01$$

$$\sigma = \frac{1}{5}, \quad u_p = 1{,}65 \Rightarrow u_p \cdot \sigma \cdot 100 \le \sqrt{n}$$

2p

② $X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} = Y$ CHT miatt Normális eloszlás 2p

$M(X_i) = 0{,}4 \qquad D(X_i) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$P(41{,}5 < Y \leq 42) = ?$

$m = 100 \cdot 0{,}4 \qquad \sigma = \sqrt{100} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$N\left(40\ ,\ 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 3p

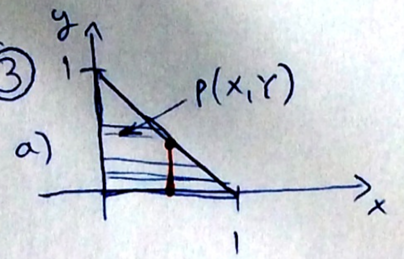
1p

$$P(41{,}5 < Y \leq 42) = P\left(\frac{41{,}5-40}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} < \frac{Y-40}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} < \frac{42-40}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \Phi\underbrace{\left(\frac{42-40}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)}_{0{,}35} - \Phi\underbrace{\left(\frac{41{,}5-40}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)}_{0{,}26} \approx$$

$\approx 0{,}63 - 0{,}59 = 0{,}04$ 1p

③

a)



pl X eloszlásfv-e?

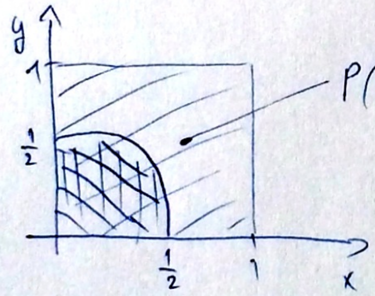
$$h(x,y) = 2 \left(= \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \triangle\text{-n}$$ 1p

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2\,dy = 2\cdot(1-x) \qquad 0 \le x \le 1$$ 1p

3p

$$g(y) = 2(1-y) \qquad 0 \le y < 1$$

b)



Sűr. fv.: $h_1(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ függetlenség miatt 2p

$$P(p(x,y)\in T) = \iint_T \underbrace{f(x)\cdot g(y)}_{2(1-x)\cdot 2(1-y)}\,dy\,dx \implies \text{számolás}$$ 2p

$$x^2+y^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \implies y = \sqrt{\tfrac{1}{4}-x^2} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} 2(1-x)\cdot 2(1-y)\,dy\,dx$$

1p

polárral: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} 2(1-r\cos\varphi)\cdot 2(1-r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$