I. ZÁRTHELYI MEGOLDÁSAI

ANALÍZIS 2., Mérnök informatikus szak

2014. október 20.

1. feladat

Oldjuk meg a következő diffegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$x \mapsto y(x) \qquad \left(x^2+2x+2\right)\left(y'-y^2\right) = (2x+2)y \qquad y(-1)=1$$

Megoldás

Rendezzük át a differenciálegyenletet **(2 pont)**

$$y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}y + y^2$$

Az egyenlet Bernoulli-típusú $\alpha = 2$-vel, ezért alkalmazzuk az $u = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ helyettesítést **(2 pont)**

Fejezzük ki y'-t a helyettesítésből **(2 pont)**

$$\frac{1}{y} = u \Rightarrow y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2}$$

Végezzük el a helyettesítést, majd rendezzük: **(2 pont)**

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \Rightarrow$$

$$u' = -\frac{2x+2}{x^2+2x+2}u - 1$$

Tehát az egyenlet lineáris, így ki kell számolnunk a homogén ill. partikuláris megoldását **(2 pont)**

Homogén megoldás, képletből, észrevéve, hogy $(x^2+2x+2)' = 2x+2$: **(4 pont)**

$$u_H(x) = c\exp\left(\int -\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\right) = ce^{-\ln(x^2+2x+2)} = \frac{c}{x^2+2x+2}$$

Inhomogén megoldás, képletből (vagy keressük $\dfrac{c(x)}{x^2+2x+2}$ alakban): **(4 pont)**

$$\frac{c'(x)}{x^2+2x+2} - c(x)\frac{(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = c(x)\frac{-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} - 1$$

$$\frac{c'(x)}{x^2+2x+2} = -1 \Rightarrow c(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$$

Így azt kapjuk, hogy: **(2 pont)**

$$u_P(x) = \frac{c(x)}{x^2+2x+2} = -\frac{1}{x^2+2x+2}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)$$

Ebből az általános megoldás: **(2 pont)**

$$u_{\text{ált}}(x) = u_H(x) + u_P(x) = \frac{c}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)$$

Behelyettesítve:

$$y_{\text{ált}}(x) = \frac{x^2+2x+2}{c - \dfrac{x^3+3x^2+6x}{3}}$$

A kezdetiérték-feladat megoldása **(3 pont)**

$$1 = \frac{1}{y(-1)} = u(-1) = c + \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Így a megoldás:

$$y(x) = -\frac{x^2+2x+2}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{x^3+3x^2+6x}{3}}$$

2. feladat

Adjuk meg (nem feltétlen explicit alakban) a következő diffegyenlet összes megoldását!

$$x \mapsto y(x) \qquad e^{2x}y' = xy^2 - xy - 2x$$

Megoldás

Rendezzük át az egynletet: **(3 pont)**

$$y' = x(y^2 - y - 2)e^{-2x} \Rightarrow \frac{y'}{y^2 - y - 2} = xe^{-2x} \text{ ha } y' \not\equiv 0$$

Az egyenlet így tehát szeparábilis **(3 pont)**

Ha $y' \equiv 0$, akkor y konstans, vagyis $xe^{-2x}(y^2 - y - 2) = 0$ x-től függetlenül. Tehát $y^2 - y - 2 = 0$, vagyis $y \equiv -1$ vagy $y \equiv 2$ **(6 pont)**

Mivel szeparábilis, ezért elegendő a két integrált elvégezni **(1 pont)**

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y - 2} = \int xe^{-2x}\mathrm{d}x$$

y szerint parciális törtekre bontunk, felhasználva, hogy $y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2)$: **(5 pont)**

$$\frac{1}{y^2 - y - 2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2) + B(y+1)}{(y+1)(y-2)} = \frac{(A+B)y + (B-2A)}{(y+1)(y-2)}$$

Ebből kapjuk, hogy $1 = (A+B)y + (B-2A)$, itt y együtthatóinak meg kell egyeznie a két oldalon, így $1 = B - 2A$ és $0 = A + B$. Ebből $B = \frac{1}{3}$ and $A = -\frac{1}{3}$, ezt pedig visszahelyettesítve:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \frac{\ln|y-2| - \ln|y+1|}{3} + C_y$$

A másik oldalt parciálisan integráljuk, $\int u'v = uv - \int uv'$ alapján $u = x$ és $v' = e^{-2x}$ helyettesítéssel, így $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ és $u' = 1$. **(4 pont)**

$$\int xe^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \int \frac{-e^{-2x}}{2}\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C_x$$

Ebből a megoldás implicit alakja : **(3 pont)**

$$\frac{\ln|y-2| - \ln|y+1|}{3} + C = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}$$

3. feladat

Válasszuk meg az $a_0, a_1, a_2 \in R$ együtthatókat és az $x \mapsto b(x)$ függvényt úgy, hogy mind az $x \mapsto y_1(x) = (e^{2x} + \sin(3x))^2$, mind pedig az $y_2(x) = e^{4x} - \cos^2(3x)$ függvény megoldása legyen a következő diffegyenletnek:

$$x \mapsto y(x) \qquad a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + y''' = b$$

Megoldás

Az egyenlet magasabb rendű, állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet, így $y_{\text{ált}}(x) = y_H(x) + y_P(x)$ alakú. Tehát ha adott két megoldás, $y_1(x)$ és $y_2(x)$, akkor a különbségük $y_1(x) - y_2(x) = y_{1H}(x) - y_{2H}(x)$ homogén megoldás lesz. **(5 pont)**

$$y_1(x) - y_2(x) = (e^{2x} + \sin(3x))^2 - (e^{4x} - \cos^2(3x)) =$$
$$= e^{4x} + 2e^{2x}\sin(3x) + \sin^2(3x) - e^{4x} + \cos^2(3x) = 2e^{2x}\sin 3x + 1$$

Ebből két alapmegoldás $e^{2x}\sin(3x)$ és 1. **(4 pont)**

Mivel ha $a + bi$ gyöke a differenciálegyenlet valós együtthatós karakterisztikus polinomjának, akkor $a - bi$ is, így $e^{ax}\sin(bx)$ és $e^{ax}\cos(bx)$ is alapmegoldás, így a karakterisztikus polinom gyökei $2 \pm 3i$ és 0. **(6 pont)**

Ebből írjuk fel a karakterisztikus polinomot, és így a homogén differenciálegyenletet: **(5 pont)**

$$0 = (\lambda - 0)(\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i) = \lambda((\lambda - 2)^2 - (3i)^2 = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 9) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda$$

Így $a_2 = -4$, $a_1 = 13$ és $a_0 = 0$ és a homogén differenciálegyenlet:

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 13y' = 0$$

$b(x)$ meghatározásához helyettesítsük be az ismert megoldásokat. Alkalmazzuk a $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$ azonosságot $y_2(x)$-re. **(5 pont)**

$$y_2(x) = e^{4x} - \frac{1 + \cos(6x)}{2} \qquad y_2'(x) = 4e^{4x} + 6\frac{\sin(6x)}{2} = 4e^{4x} + 3\sin(6x)$$

$$y_2^{(2)} = 16e^{4x} + 18\cos(6x) \qquad y_2^{(3)} = 64e^{4x} - 108\sin(6x)$$

Persze $y_1(x)$-re is lehet, de az rondább:

$$y_1(x) = \left(e^{2x} + \sin(3x)\right)^2 \qquad y_1'(x) = 2\left(e^{2x} + \sin(3x)\right)\left(2e^{2x} + 3\cos(3x)\right)$$

$$y_1^{(2)} = 2\left(4e^{2x} - 9\sin(3x)\right)\left(e^{2x} + \sin(3x)\right) + 2\left(2e^{2x} + 3\cos(3x)\right)^2$$

$$y_1^{(3)} = 6\left(4e^{2x} - 9\sin(3x)\right)\left(2e^{2x} + 3\cos(3x)\right) + 2\left(e^{2x} + \sin(3x)\right)\left(8e^{2x} - 27\cos(3x)\right)$$

Ebből $b(x)$-re kapjuk:

$$b(x) = y_2^{(3)} - 4y_2^{(2)} + 13y' = 64e^{4x} - 108\sin(6x) - 4(16e^{4x} + 18\cos(6x)) + 13(4e^{4x} + 3\sin(6x)) \Rightarrow$$

$$b(x) = 52e^{4x} - 69\sin(6x) - 72\cos(6x)$$

4. feladat

Tegyük föl, hogy az $x > 0$ tartományon az $x \mapsto y(x)$ függvény egy megoldása az

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

diffegyenletnek. Fejezzük ki y''-t mint x és y függvényét, és mutassuk meg: (i) $y'' \geq 0$ a teljes $x > 0$ tartományon, (ii) ha $y(1) = 0$, akkor $y(2) \in (2, 2\pi)$. *Segítség (ii)-hez, at alsó belcséshez használjuk föl (i)-t, a fölső becsléshez pedig fontoljuk meg, hogy hogy bár egy általános megoldás explicit fölírása nehéz, talán van a diffegyenletnek néhány könnyen fölírható megoldása is.*

Megoldás

Fejezzük ki tehát y''-t, és közben $y'x - y$ helyére írjuk be a megadott egyenlet átrendezését: **(5 pont)**

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2} \qquad y' = 1 + \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y'x - y = x + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

A deriválást a láncszabály alkalmazásával csináljuk:

$$y'' = \left(\frac{y}{x}\right)' - \left(\frac{y}{x}\right)'\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \left(1 - \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Mindhárom tényező nemnegatív, ugyanis $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$, így $y'' \geq 0$. **(4 pont)**

Az előzőeket felhasználva $\frac{y}{x}$-re egy differenciálegyenlet: **(4 pont)**

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Keressük ennek konstans megoldását: **(4 pont)**

$$0 = 1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{y}{x} = (2k + 1)\pi \Rightarrow y = \pi x \text{ konstans megoldás}$$

A Picard-Lindelöf tételből tudjuk, hogy a trajektóriák nem metszik egymást, így mivel $y(1) = 0 < 1 \cdot \pi$, így $y(2) < 2\pi$ **(4 pont)**

A differenciálegyenletből

$$y'(1) = 1 + \frac{0}{1} + \cos(0) = 2$$

Az (i) alapján $y''(x) \geq 0$ az $[1, \infty)$ tartományon, ezért $y'(x)$ itt monoton nő, ezért $y'(x) \geq y'(1) = 2$. Tehát a Lagrange középértéktétel miatt $\exists \xi \in (1, x)$, hogy **(4 pont)**

$$y(x) = y(1) + y'(\xi)(x-1) \geq y(1) + y'(1)(x-1)$$

$y'(1) = 2$, így $y(2) \geq 0 + 2 \cdot 1 = 2$.

Megjegyzés 1.

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x}\left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow u' = \frac{1 + \cos u}{x} \Rightarrow \frac{u'}{1 + \cos u} = \frac{1}{x}$$

Szétválasztható, helyettesítsünk $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = w$-t, ekkor $\mathrm{d}u = \dfrac{2\,\mathrm{d}w}{1 + w^2}$ és $\cos u = \dfrac{1 - w^2}{1 + w^2}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + \cos u} = \int \frac{1}{1 + \frac{1 - w^2}{1 + w^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}w}{1 + w^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}w}{2} = w + C = \operatorname{tg}\frac{u}{2} + C = \operatorname{tg}\frac{y}{2x} + C$$

Innét

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} + C = \ln|x| \Rightarrow y(x) = 2x\operatorname{arctg}(\ln|x| - C)$$

Ebből az első feladatrészben ($x > 0$ miatt az abszolútértékjel elhagyható):

$$y''(x) = \frac{2(C - \log|x| + 1)^2}{x\left(C^2 - 2C\log|x| + \log^2|x| + 1\right)^2}$$

a második részben $y(x) = 2x\arctan(\ln(x))$, így $y(2) = 4\arctan(\ln(2)) \approx 2.425$

Megjegyzés 2. A Lagrange középértéktétel helyett persze érvelhetünk úgy is, hogy itt az érintő meredekebb, ezért jobban nő a függvény, bár ez nem teljesen korrekt, de legalább szemléletes.

5. feladat

Ansatz – educated guess vagy keressük ilyen alakban jellegű hozzáállás a problémákhoz