

A Park-vektoros számítási módszer elve és alkalmazása

A Park-vektorokat első sorban a háromfázisú gépek és hajtások leírásánál, vizsgálatánál, tervezésénél, szabályozásánál alkalmazzák. A Park-vektorokkal kevesebb egyenletet kell felírni, ezek a vektorok, vektor diagramok szemléletesebbek, mint a fázisonkénti időfüggvények, jobban kifejezik a fizikai folyamatokat. Átmeneti, nem-szinuszos és időben aszimmetrikus jelenségek tárgyalásakor is használhatók. A Park-vektorok, vektor diagramok számítással és méréssel is előállíthatók.

Forgó mágneses mező létrehozása

A váltakozó áramú villamos forgógépek nagy része szimmetrikus háromfázisú állórész tekercseléssel készül, ez az alapja annak, hogy a továbbiakban ilyen feltételezéssel élünk.

Mezőeloszlás állandó áramú gerjesztés esetén

A gerjesztési törvény szerint a mágneses térerősség:

$$\oint_{\ell} \bar{H} d\bar{\ell} = \int_A \bar{J} d\bar{A}.$$

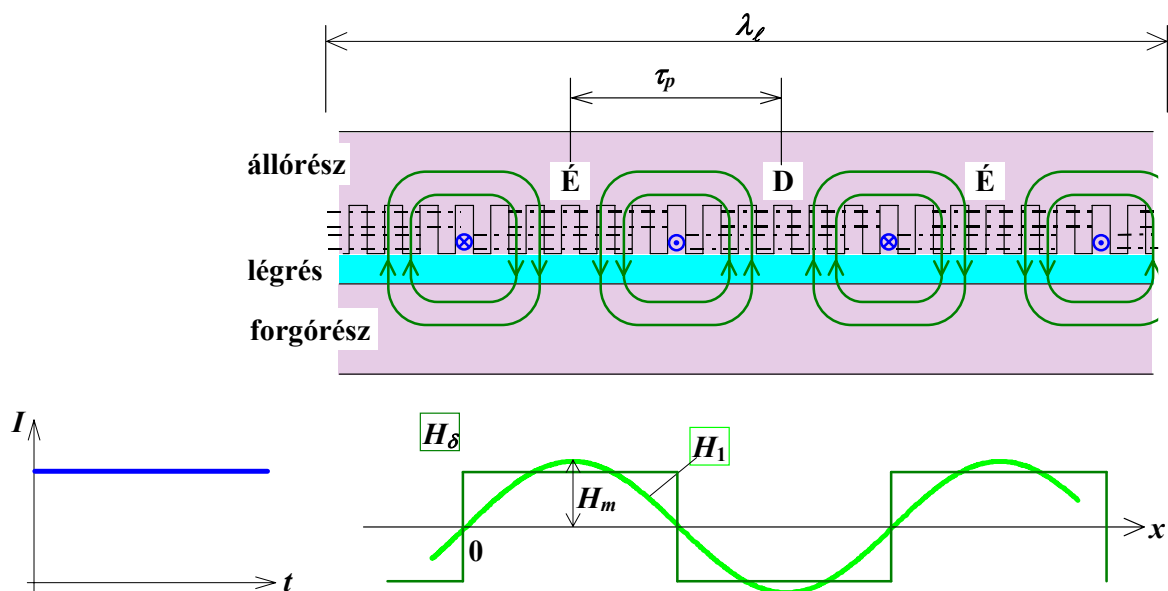
Feltételezve, hogy az I áram egyetlen vonalszerű vezetőben koncentrálódik, megfelelő integrálási út választásával a vezető körül állandó térerősségű szakaszokat kapunk, ezért az integrálok összegezésével egyszerűsödnek:

$$\oint \bar{H} d\bar{\ell} = \sum_i H_i \ell_i \text{ és } \int_A \bar{J} d\bar{A} = \sum_j I_j = I = \Theta.$$

A további egyszerűsítés érdekében hanyagoljuk el a vasmagra jutó gerjesztést a δ légréséhez képest (mivel $\mu_{r\delta}=1$ és $\mu_{rvas} \sim 10^3$), ezzel a gerjesztési egyenlet

$$2H_{\delta}\delta \approx I.$$

itt H_{δ} - a térerősség a légrésben, tehát $I=\text{áll.}$ esetén $H_{\delta}=\text{áll.}$



Egyetlen menetben folyó állandó I áram által a kiterített légrésben létrehozott mágneses tér

Ennek megfelelően időben állandó $I=\text{áll.}$ (egyenáramú) táplálásnál a kerület mentén elhelyezett egyetlen menet vagy tekercs a légrésben közel négyzet alakú térbeli eloszlású mágneses

térerősséget és indukciót hoz létre. A térbeli felharmonikusokat elhanyagolva a légrés mentén szinusz alakú mezőeloszlást kapunk, $H_1(x)$ -vel jelölve az alapharmonikust.

A kapott térerősség $H_1(x)$ térbeli alapharmonikusának matematikai leírása a légrésben:

$$H_1(x) = H_m \sin\left(p \frac{2\pi}{\lambda_\ell} x\right), \quad 0 \leq x \leq \lambda_\ell,$$

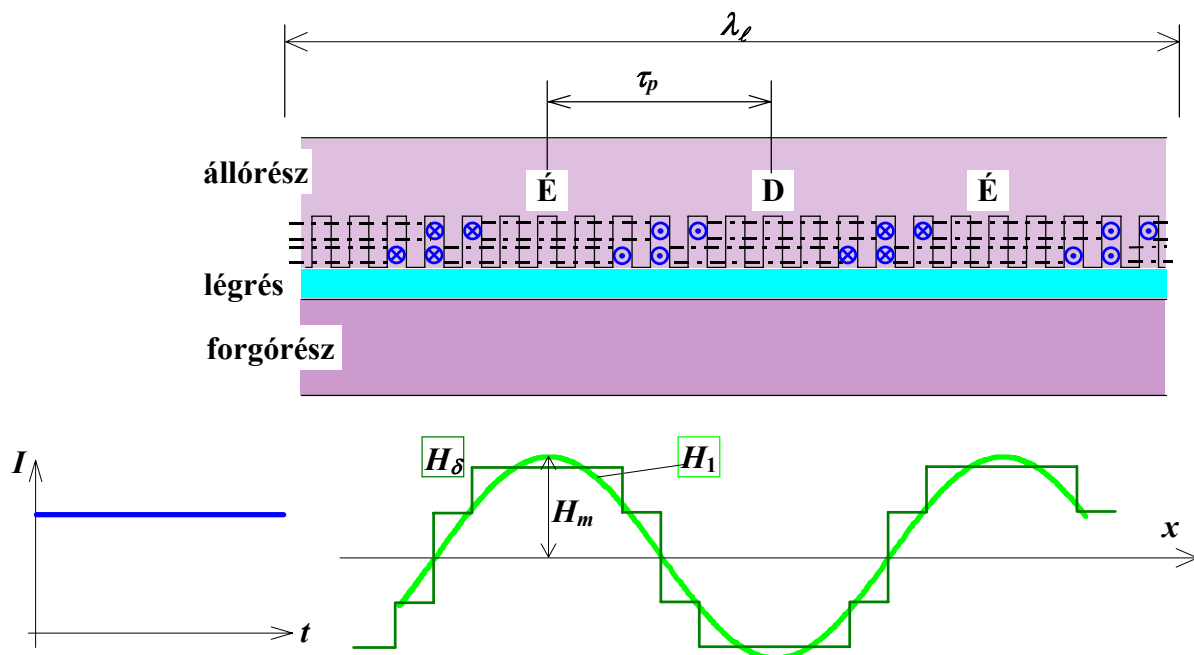
itt H_m – a térerősség H_1 alapharmonikusának amplitúdója, $\lambda_\ell = D_\ell \pi = 2p \tau_p$ – a légrés kiterített hossza (D_ℓ a légrés sugara, τ_p a pólusosztás) és p a póluspárok száma (egy térbeli periódus hossza λ_ℓ/p).

Hasonló összefüggés írható fel a térerősséggel arányos indukció, a fluxus, a tekercsfluxus, a gerjesztés, a kerületi áram és az indukált feszültség alapharmonikusának légrésmenti térbeli eloszlására.

A hornyok hatásának figyelembe vétele

Nyitott állórész hornyon esetén – egyenes erővonalakat feltételezve – a hornyon lényegében megnöveli a légrést, így – erősen leegyszerűsítve – a hornyon átmenő fluxusvonal mentén történő integrálásakor a gerjesztési törvényben $\delta+h$ -val kell számolni (h a horny mélység), míg fogon átmenő fluxusvonal esetén δ -val. Tovább bonyolítja a képet a forgórész hornyok kialakítása (zárt, féligzárt, nyitott). Egy fluxusvonal a légrés környezetében haladhat fog-fog, fog-horony, horony-fog, horony-horony úton. Mivel a forgórész mozog az állórészhez képest, a térbeli eloszlás időben is változik (a szögsebességtől és a fogak számától függően). A hornyok hatását a továbbiakban nem vesszük figyelembe.

A tekercsek rendszerint több menetből állnak, ezeket egymás melletti hornyokba elosztva a mező olyan lépcsős térbeli eloszlása érhető el, amelyik kevesebb térbeli felharmonikusot tartalmaz. Ez a térbeli periodikus görbe sorba fejthető, és ha csak az alapharmonikusát tekintjük, akkor szinuszos térbeli mezőeloszlásról beszélünk. Részletesebb vizsgálatoknál a térbeli felharmonikusokat is figyelembe kell venni (szinuszos térbeli alapharmonikus + térbeli felharmonikusok).



Kétrétegű tekercs lépcsős mágneses tere a kiterített légrésben állandó áramú táplálásnál

Ha az állórész áram nem állandó $I \neq \text{áll.}$, akkor a mező térbeli alapharmonikusának (és felharmonikusainak) amplitúdója időben változik, de a mező legrésmenti eloszlásának jellege nem. Szinuszos függvény szerint váltakozó árammal történő táplálásnál a térbeli hullám magassága a kerület minden pontjában időben szinuszosan változik, lüktető, pulzáló mező alakul ki, más függvény (pl. lineáris, háromszög) szerint változó áram esetén a mező is másképpen változik időben, de ez a térbeli eloszlást nem befolyásolja.

Egyszerű vizsgálatoknál csak a térbeli alapharmonikust vesszük figyelembe, a térbeli eloszlás tehát szinuszos, amit olyan térbeli (vagy egy metszetet tekintve síkbeli) komplex vektorral ábrázolhatunk, ami a legnagyobb pozitív érték irányába mutat, nagysága a szinuszos hullám amplitúdójával egyenlő.

Többfázisú táplálásnál az egyes fázistekercsek áramai külön-külön hozzák létre az eredő mező komponenseit.

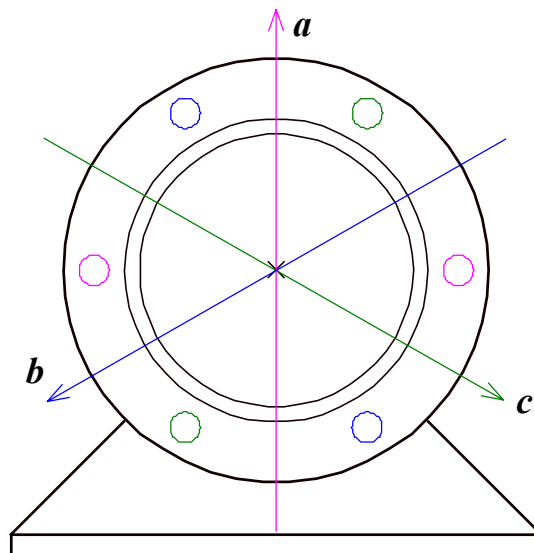
A szinuszos térbeli eloszlás feltételezését a szinuszos függvény hasznos jellemző tulajdonságai indokolják:

- periodikus, determinisztikus,
- két azonos frekvenciájú szinuszos függvény eredője (összege, különbsége) szinuszos alakú,
- a szinuszos függvény deriváltja szinuszos alakú,
- a szinuszos függvény integrálja szinuszos alakú.

A szinuszos függvény további jellegzetessége, hogy komplex síkon fázisvektorral (fázissal) ábrázolható. Komplex vektorokkal az összeadás, kivonás, deriválás és integrálás egyszerűen elvégezhető és szemléletes minőségi képet ad.

Az alkalmazott a , b , c fázistengelyek az egyes fázistekercsek által létrehozott mezőkomponensek térbeli irányába mutatnak, tehát egymáshoz képest 120° -kal elfordítva fekszenek.

A térbeli mezőeloszlást a gép tengelyére merőleges síkban ábrázolják.



A térbeli mezőeloszlás ábrázolásánál használt fázistengelyek

Váltakozó áramú gerjesztés mezőeloszlása

Az előzőek alapján az egyes fázistekercsek időben szinuszosan váltakozó áramú táplálása esetén időben lüktető, térbeli szinuszos mezőeloszlást kapunk, amit időben változó nagyságú és a fázistekercsek geometriai elhelyezkedése által meghatározott térbeli irányú komplex vektorokkal mutatnak.

A háromfázisú eredő mező (a három lüktető szinusz függvény eredője) térbeli eloszlása is szinusz alakú, így az eredő is egy vektorral ábrázolható. A három fázistekercs által létrehozott lüktető mágneses térerősség komponenseinek (h_a, h_b, h_c) nagysága a hely és az idő függvénye is, $p=1$ feltételezésével:

$$h_a(w_1t, x) = H_m \sin w_1t \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda_\ell} x,$$

$$h_b(w_1t, x) = H_m \sin\left(w_1t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_\ell} x - \frac{2\pi}{3}\right),$$

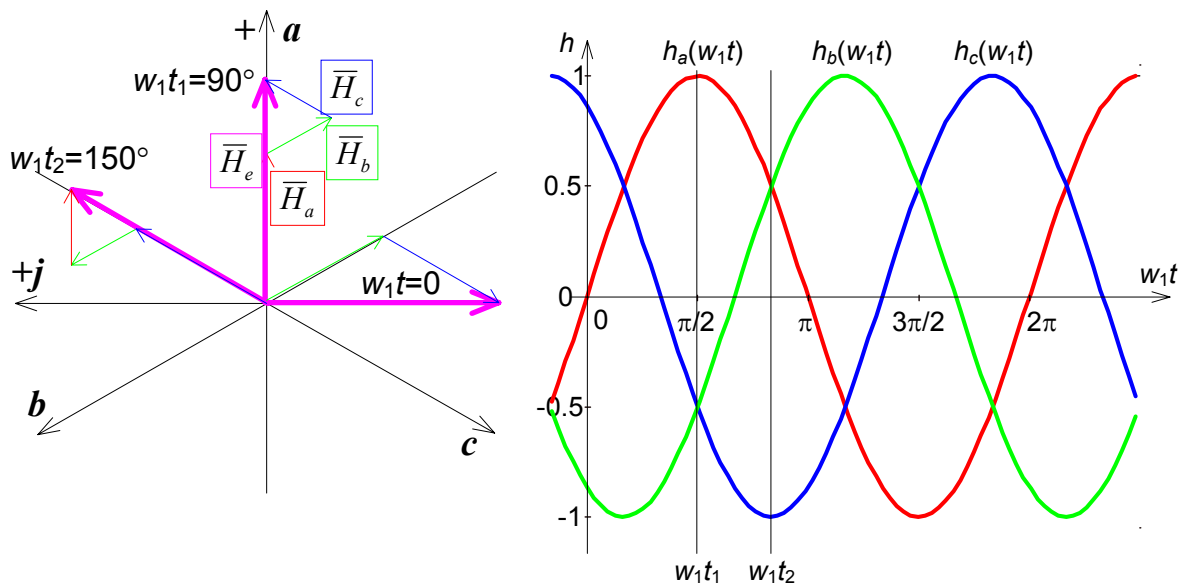
$$h_c(w_1t, x) = H_m \sin\left(w_1t + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_\ell} x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

A három lüktető mező H_e eredője:

$$h_a(w_1t, x) + h_b(w_1t, x) + h_c(w_1t, x) = H_e(w_1t, x) = \frac{3}{2} H_m \cos\left(w_1t - \frac{2\pi}{\lambda_\ell} x\right).$$

Jelöljük x_{max} -al az eredő mező pozitív maximális értékének térbeli pozícióját a kiterített légrés mentén: $x_{max} = \frac{\lambda_\ell}{2\pi} w_1t$, vagyis az állandó amplitúdójú ($1,5H_m$) görbe, egyenes sebességgel

haladó mozgást végez, a sebesség arányos a körfrekvenciával. Úgy is elképzelhető, mintha az eredő szinusz térbeli eloszlású mezőt egyetlen egyfázisú haladó (tulajdonképpen forgó) tekercs hozná létre, aminek gerjesztő árama másfélszerese egy tényleges fázisáram amplitúdójának. Nem kiterített légrésben az eredő mező körben forog, $w_{mező}$ szögsebessége az f_1 hálózati frekvenciától és a pólusszámtól függ: $w_{mező} = \frac{2\pi f_1}{p}$.



Háromfázisú tekercsrendszer térerősségének időfüggvénye fázisonként és az eredő mágneses tér vektorai a komplex síkon

Az egyes fázisok által létrehozott mágneses teret és a légrés H_e eredő mágneses terét komplex vektorokkal is leírhatjuk, \bar{H}_a az a -tengely, \bar{H}_b a b -tengely és \bar{H}_c a c -tengely irányába mutat:

$$\begin{aligned}\bar{H}_a &= H_m \sin \omega_1 t = \frac{H_m}{2j} (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}), \\ \bar{H}_b &= H_m \sin\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}\right) e^{j120^\circ} = \frac{H_m}{2j} (e^{j\omega_1 t} e^{-j120^\circ} - e^{-j\omega_1 t} e^{j120^\circ}) e^{j120^\circ}, \\ \bar{H}_c &= H_m \sin\left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}\right) e^{-j120^\circ} = \frac{H_m}{2j} (e^{j\omega_1 t} e^{j120^\circ} - e^{-j\omega_1 t} e^{-j120^\circ}) e^{-j120^\circ}, \\ \bar{H}_a + \bar{H}_b + \bar{H}_c &= \bar{H}_e = -j \frac{3}{2} H_m e^{j\omega_1 t} \left(= \frac{3}{2} H_m e^{j(\omega_1 t - 90^\circ)} \right).\end{aligned}$$

A $-j$ szorzó a $t=0$ időpont megválasztásával kapcsolatos, jelen esetben ez az időpont az a fázismennyiség (h_a) pozitív nullaátmenetének pillanata.

A komplex számítással kapott eredmény természetesen ugyanaz: a légrésben lévő eredő térerősség egy $1,5H_m$ amplitúdójú, körben forgó, térben szinuszos eloszlású mágneses mező, amit egy $1,5H_m$ hosszúságú forgó vektorral ábrázolhatunk (H_m az egyes fázis tekercsek által létesített mező-komponens legnagyobb amplitúdója).

Ez az eredő vektor jelenti a Park-vektor matematikai leírásának fizikai hátterét.

A mágneses mező kialakulásának eddigi tárgyalása során csak a térbeli eloszlásra volt előírás, mert az eredő térvektor képzésének (vektoros összegzésének) feltétele a térben szinuszos eloszlás. Az egyes fázistekercsekben folyó áramok időbeli változására, vagy a tekercsre adott feszültség alakjára nincs megkötés.

Amennyiben a fázisáramok időben nem állandó amplitúdójú szinuszos függvény szerint változnak (például tranzienst folyamatok alatt), az eredő mező (és a vektor) szögsebessége és nagysága is eltérő változást mutat az előzőektől. Ekkor az elképzelt helyettesítő egyfázisú „eredő” tekercs által létrehozott szinuszos eloszlású tér nagysága és forgási sebessége is időben változó a légrés mentén.

A Park-vektor definíciója

A Park-vektort úgy definiálták, hogy annak hossza az eredő térvektor (3 fázisú vektor) abszolút értékének $2/3$ -ad része legyen, tehát megegyezzen az egyes fázismennyiségek vektorának maximális értékével.

Ezt a definíciót a H mágneses térerősségre alkalmazva a térerősség $\bar{H}(t)$ Park-vektora:

$$\bar{H}(t) = \frac{2}{3} [h_a(t) + \bar{a}h_b(t) + \bar{a}^2 h_c(t)] \quad \bar{a} = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \bar{a}^2 = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$h_a(t)$, $h_b(t)$, $h_c(t)$ - az egyes fázistekercsek által létrehozott mágneses térerősség időfüggvénye, \bar{a} (\bar{a}^2) – a komplex síkon pozitív (negatív) irányban 120° -kal elforgató egységvektor.

A Park-vektorokat nem csak térvektorokkal jellemezhető mennyiségekből képeznek, hanem integrális, skalár mennyiségekből is. Ennek alapja a mágneses térerősség és a gerjesztés vagy az áram közötti összefüggés, a térerősség és az indukció közötti kapcsolat (a légrésben a permeabilitás $\mu_0 = \text{áll.}$), az indukció, a fluxus és az indukált feszültség összefüggései. Skalár változóknál gyakran Park-transzformációról beszélnek, alkalmazása megkönnyíti és szemléletessé teszi a számítást és az értelmezést.

A Park-vektort komplex síkon, kettős koordináta rendszerben (háromfázisú és ortogonális) ábrázolják.

3 fázisú, időben szimmetrikus szinuszos táplálás és térben szimmetrikus tekercsrendszer esetén a légrés mágneses térerősségének eredő Park-vektora:

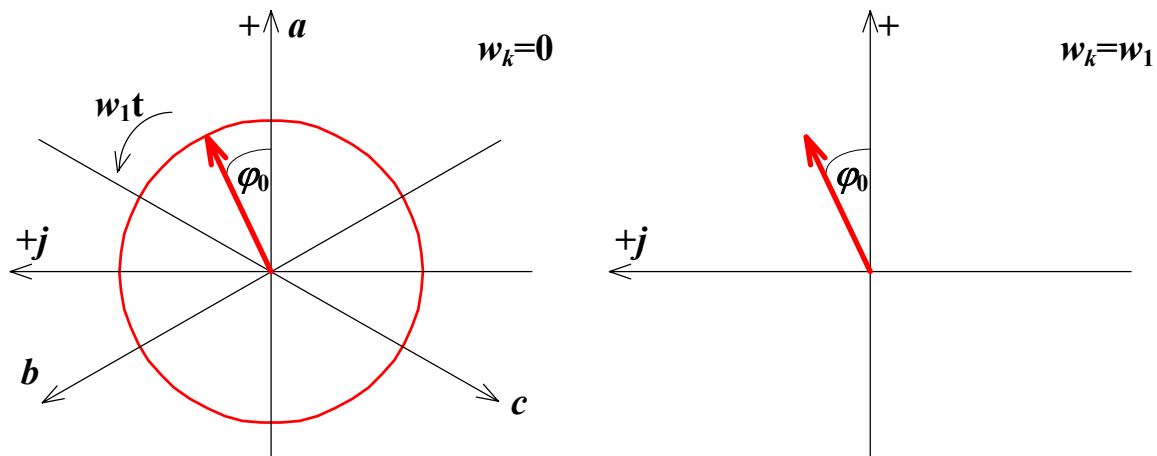
$$- (+) \text{ sorrendű táplálás esetén: } \bar{H}(t) = H_m e^{j(\omega_1 t + \varphi_0)},$$

- (-) sorrendű táplálás esetén: $\bar{H}(t) = H_m e^{-j(\omega_1 t + \varphi_0)}$.

A φ_0 kezdeti fázisszög a $t=0$ időpont megválasztásától függ.

Mivel a zérus sorrendű összetevők egymással fázisban lévő, azonos amplitúdójú mennyiségeket jelentenek, a Park-vektor képzéskor ezek az összetevők kiesnek, amit figyelembe kell venni a számítások értékelése, a következtetések levonása során.

Park-vektor diagram (görbe, pálya): a Park-vektor végpontjának mértani helye (állandósult állapotban 1 periódus alatt).

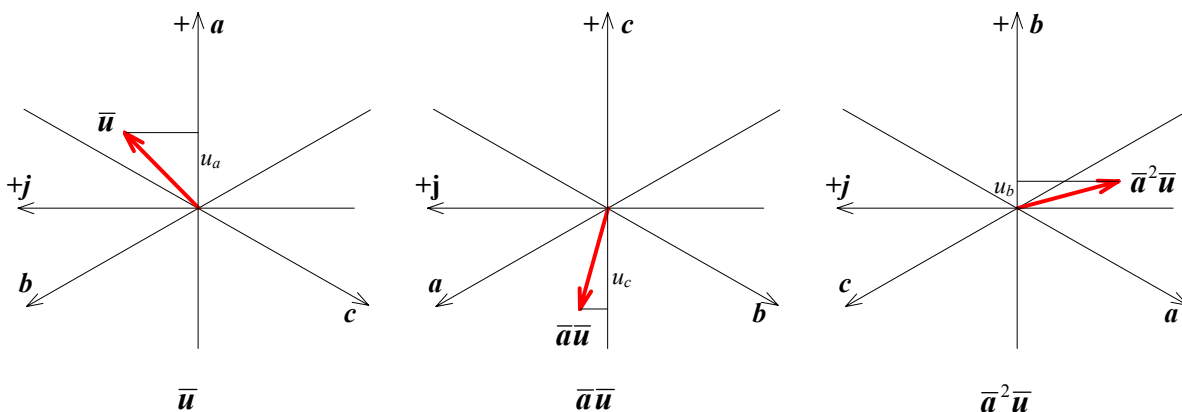


Szimmetrikus, 3 fázisú, időben szinuszosan változó mennyiség Park-vektor diagramja álló és szinkron forgó koordináta rendszerben

A Park-vektor ábrázolható álló ($\omega_k=0$) vagy szinkron forgó ($\omega_k=\omega_1$) koordináta rendszerben (ω_k – a koordináta rendszer szögsebessége).

Állandósult állapotban, szimmetrikus, 3 fázisú, időben szinuszos mennyiségek esetén álló koordináta rendszerben a diagram kör, szinkron forgó koordináta rendszerben egyetlen pont, aminek szöghelyzete a kezdeti fázisszögtől függ.

Mivel a teljes kör 360° -nak, 1 periódusnak felel meg, a görbe mentén minden szög villamos fokokban mérendő, ami a $\omega_k=\omega_1$ koordináta rendszerben felrajzolt vektorábrában is igaz (vagyis $p=1$ esetnek tekinthetjük).



A Park-vektor valós részének képzése

Fázismennyiségek meghatározása a Park-vektorból

A Park-vektort a definíciós képlet szerint a fázismennyiségek pillanatértékéből képezzük, az átalakítás visszafelé is alkalmazható, a Park-vektorból meghatározhatók az egyes fázismennyiségek, de a zérus sorrendű összetevőt külön kell figyelembe venni.

Példaként a feszültség Park-vektorát tekintve, annak valós része az a -fázis komponensét adja, mivel az a fázistengely egybeesik a komplex sík valós tengelyével.

$$\operatorname{Re}\{\bar{u}(t)\} = \frac{2}{3} \left[u_a(t) - \frac{1}{2} u_b(t) - \frac{1}{2} u_c(t) \right] = u_a(t) - u_0(t).$$

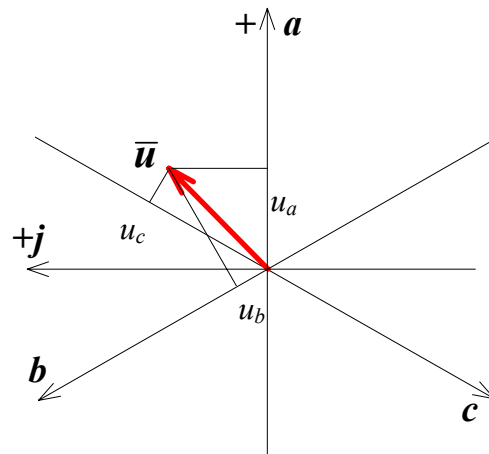
Tehát zérus sorrendű összetevő jelenlétekor $u_a(t) = \operatorname{Re}\{\bar{u}(t)\} + u_0(t)$.

A Park-vektort és vele együtt a háromfázisú koordináta rendszert 120° -kal előre (+ irányban) forgatva a komplex síkon a c -tengely kerül fedésbe a valós tengellyel, így az elforgatott Park-vektor valós része a c -fázis komponensét adja – az $u_0(t)$ zérus sorrendű összetevő nélkül:

$$\operatorname{Re}\{\bar{a}\bar{u}(t)\} = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{2} u_a(t) - \frac{1}{2} u_b(t) + u_c \right] = u_c(t) - u_0(t),$$

további 120° -kal előre forgatva a b -fázis komponensét kapjuk:

$$\operatorname{Re}\{\bar{a}^2\bar{u}(t)\} = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{2} u_a(t) + u_b(t) - \frac{1}{2} u_c(t) \right] = u_b(t) - u_0(t).$$



Az egyes fázis komponensek képzése a Park-vektor fázistengelyekre vetítésével

Ugyanezt az eredményt kapjuk grafikusán, ha a Park-vektort az egyes fázistengelyekre vetítjük. Ezt a matematika nyelvén úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a Park-vektor skaláris szorzatát képezzük az egyes fázistengelyek irányába mutató egységvektorral:

$$u_a(t) - u_0(t) = 1 \cdot \bar{u}(t) = \frac{2}{3} \left(u_a - \frac{1}{2} u_b - \frac{1}{2} u_c \right),$$

$$u_b(t) - u_0(t) = \bar{a} \cdot \bar{u}(t) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} u_a + u_b - \frac{1}{2} u_c \right),$$

$$u_c(t) - u_0(t) = \bar{a}^2 \cdot \bar{u}(t) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} u_a - \frac{1}{2} u_b + u_c \right).$$

A Park-vektor oszcillografálása

A feszültség Park-vektor $\bar{u} = u_x + ju_y$, komplex összetevőinek fizikai jelentése van:

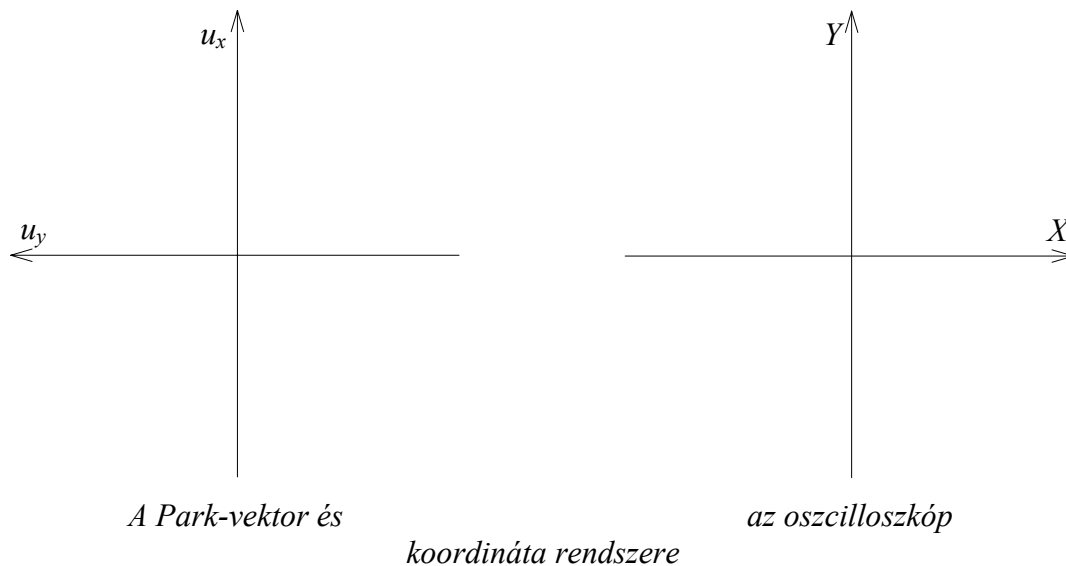
$$\operatorname{Re}\{\bar{u}\} = u_x = \frac{2}{3} \left[u_a - \frac{1}{2} u_b - \frac{1}{2} u_c \right] = u_a(t) - \text{az } a\text{-fázis feszültségének időfüggvénye,}$$

$Im\{\bar{u}\} = u_y = \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (u_b - u_c) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} [u_b(t) - u_c(t)]$ – a b - c vonali feszültség időfüggvényének $\sqrt{3}$ -ad része.

Az oszcilloszkóp függőleges bemenetét Y -al jelölve, a vízszintes eltérítést X -el, a Park-vektor komponenseket az alábbiak szerint kell az X - Y üzemmódú oszcilloszkóp bemeneteire adni, hogy a definíció szerinti diagramot kapjuk:

$$u_x \Rightarrow Y, \quad -u_y \Rightarrow X$$

A Park-vektor megjeleníthető szinkron forgó koordináta rendszerben is, ehhez az összetevőket matematikai úton kell előállítani: $u_x = Re\{\bar{u}e^{-j\omega_1 t}\}$ és $u_y = Im\{\bar{u}e^{-j\omega_1 t}\}$.



A korábban leírtak szerint a Park-vektor alkalmazásának feltétele a szinuszos térbeli mezőeloszlás, viszont az időbeli változással kapcsolatban nincs megkötés. A térbeli szinuszos hullám vagy a Park-transzformációval kapott más mennyiség amplitúdója tetszőleges időfüggvénynek megfelelően változhat, például szinuszosan, lineárisan, ugrásszerűen.

Tehát a Park-vektor diagram – a vektor végpontjának mértani helye – a térben szinuszos eloszlású mennyiségek időbeli változását mutatja. Állandósult állapotban egy periódusra ábrázolják, de hosszabb tranzienst is követhetők vele.

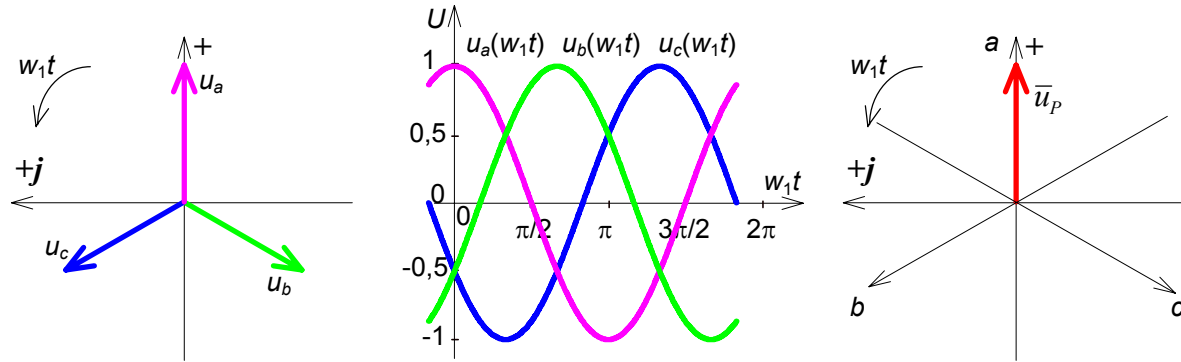
A Park-vektor, a fázorok és a szimmetrikus összetevők kapcsolata

A Park-vektor a szinuszos térbeli eloszlás időbeli változását mutatja, a fázorokra pedig a szinuszos időbeli változást reprezentálja. A szimmetrikus összetevők rendszere a fázisonként eltérő fázorokat (tehát szinuszos függvény szerint változó aszimmetrikus fázismennyiségeket) helyettesíti.

Minden fázor egy-egy szinuszos függvényt képvisel, a fázorok közötti szögeltérés megfelel a szinuszos függvények közötti fáziseltolásnak. Háromfázisú, szinuszos függvény szerint változó mennyiségek három fázorral illusztrálhatók.

Álló koordináta rendszerben a fázorok a szinuszos függvény körfrekvenciájának megfelelő szögsebességgel forognak (+) irányban, szinkron forgó koordináta rendszerben pedig állnak, pillanatfelvételnél rögzítve a szinuszos függvények aktuális helyzetét.

A szinuszos függvények pillanatértékét a fázorok vetülete adja, rendszerint a valós vagy a képzetes tengelyre eső vetületet használják.



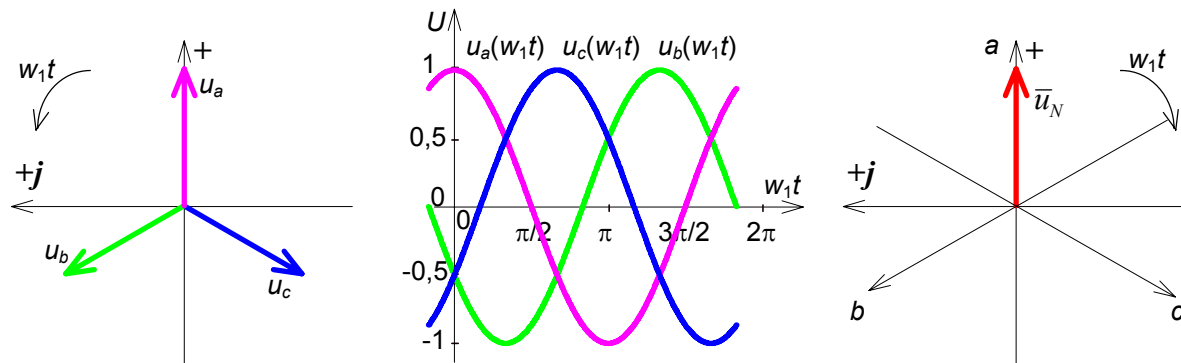
fázorábrája

Pozitív sorrendű feszültségrendszer időfüggvénye

Park-vektora

A Park-vektor tartalmazza mindhárom fázis aktuális változóját (a zérus sorrendű komponens nélkül).

Az ábrák szerinti feszültségrendszer Park-vektora egybe esik az U_a fázorral és egymagában képviseli a három fázisfeszültséget a három fázistengelyre eső vetületével.

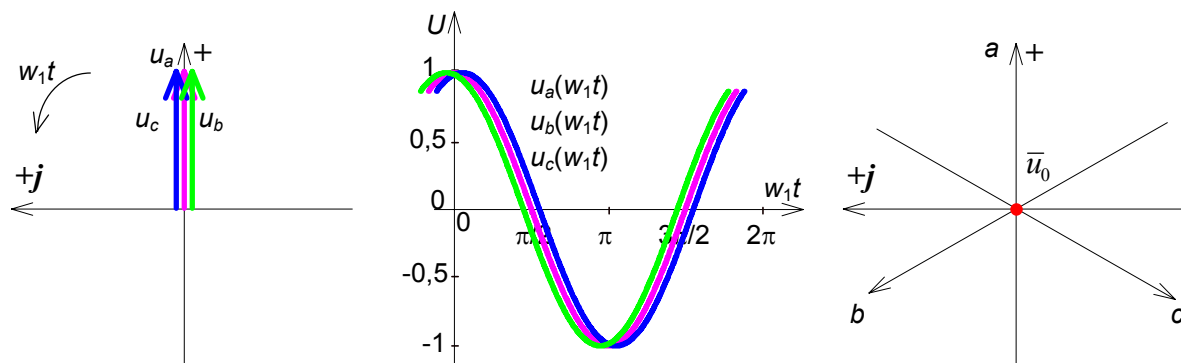


fázorábrája

Negatív sorrendű feszültségrendszer időfüggvénye

Park-vektora

A Park-vektort alkotó fázismennyiségek időbeli változása eltérhet a szinusz jellegtől (pl. felharmonikusokat is tartalmazhat). A fázor csak szinusz függvény szerinti változást képvisel, a felharmonikusokat külön felharmonikus fázorokkal lehet, kell figyelembe venni.



fázorábrája

Zérus sorrendű feszültségrendszer időfüggvénye

Park-vektora

A (+) sorrendű feszültség rendszer Park-vektora pozitív, a (-) sorrendűé negatív forgásirányban halad állandó szögsebességgel, $\bar{u}_p = u_p e^{j\omega t}$ és $\bar{u}_N = u_p e^{-j\omega t}$. A zérus sorrendű mennyiségek Park-vektora zérus vektornak is tekinthető $\bar{u}_0 = \bar{0}$. A fázorok pozitív forgásirányban haladnak, a fázissorrend a követési sorrendet jelenti.

1. Alkalmazási példa: aszimmetrikus üzem

Tekintsük a szimmetrikus 3 fázisú táphálózat fázisfeszültségeinek alábbi időfüggvényeit:

$$u_a(w_1t) = U_m \sin w_1t,$$

$$u_b(w_1t) = U_m \sin(w_1t - 2\pi/3),$$

$$u_c(w_1t) = U_m \sin(w_1t + 2\pi/3).$$

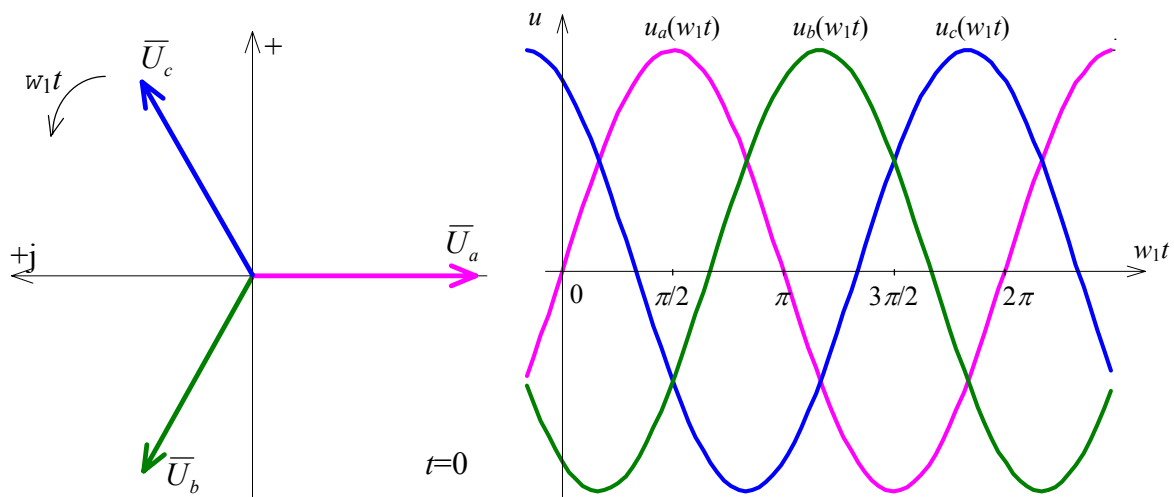
Ezeket a függvényeket kapjuk a fázorok valós vetületeként is:

$$u_a(w_1t) = \operatorname{Re}\{\bar{U}_a\} = \operatorname{Re}\{U_m e^{jw_1t}\},$$

$$u_b(w_1t) = \operatorname{Re}\{\bar{U}_b\} = \operatorname{Re}\left\{U_m e^{j\left(w_1t - \frac{2\pi}{3}\right)}\right\},$$

$$u_c(w_1t) = \operatorname{Re}\{\bar{U}_c\} = \operatorname{Re}\left\{U_m e^{j\left(w_1t + \frac{2\pi}{3}\right)}\right\}.$$

A referencia (nulla potenciál) legyen a hálózat csillagpontjának u_0 feszültsége $u_0=0$.



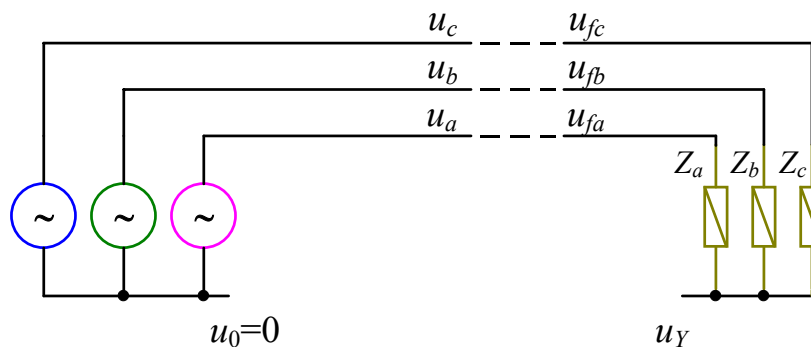
Pozitív sorrendű hálózati feszültségrendszer - fázorok és időfüggvények

1a. Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó szimmetrikus táplálásakor az egyes fázisok $u_f(w_1t)$ feszültsége megegyezik a hálózati $u(w_1t)$ fázisfeszültségekkel:

$$u_{fa}(w_1t) = u_a(w_1t),$$

$$u_{fb}(w_1t) = u_b(w_1t),$$

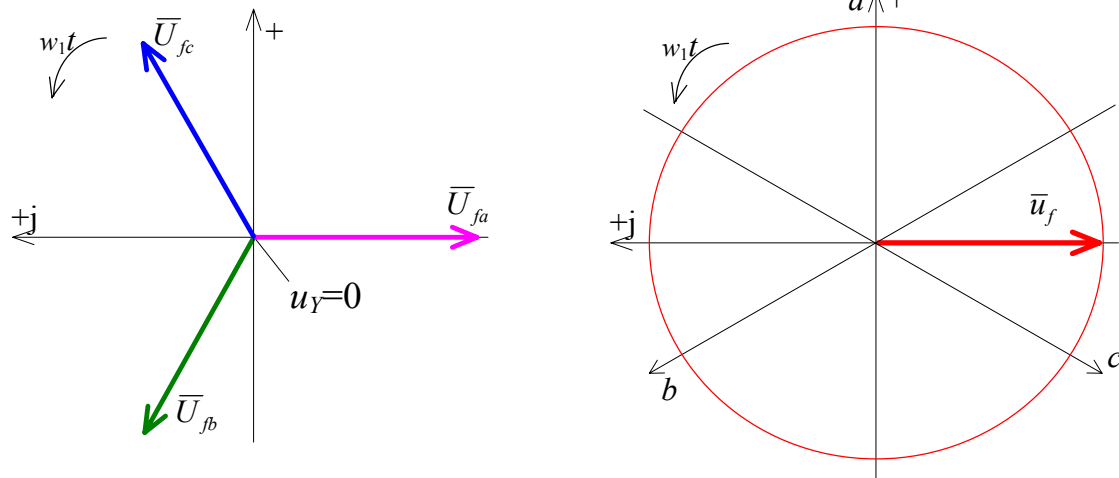
$$u_{fc}(w_1t) = u_c(w_1t).$$



Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó szimmetrikus táplálása - áramkörti vázlat

A fogyasztó feszültségének $\bar{u}_f(w_1t)$ Park-vektora nem különbözik a hálózatétól

$$\bar{u}_f(w_1t) = \bar{u}(w_1t) = -jU_m e^{jw_1t} .$$



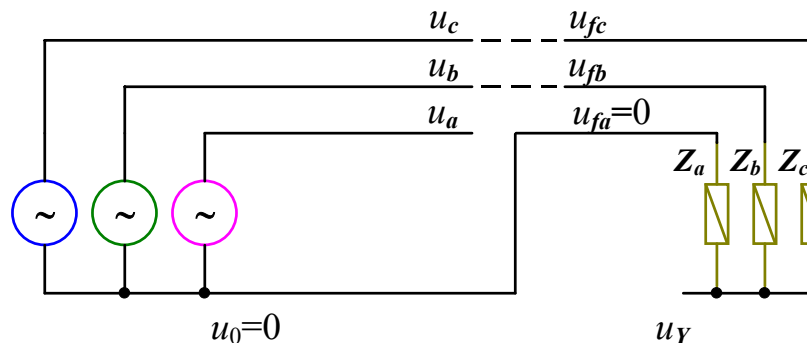
Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó szimmetrikus táplálása - fázorábra és Park-vektor ($t=0$)

És a zérus sorrendű összetevő (fogyasztó csillagponti feszültsége) $u_Y = 0$, sem különbözik a hálózatétól:

$$\begin{aligned} \bar{U}_Y &= \frac{1}{3}(\bar{U}_{fa} + \bar{U}_{fb} + \bar{U}_{fc}) = \frac{1}{3}U_m(e^{-j90^\circ} + e^{j150^\circ} + e^{j30^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}U_m(-j + \cos 150^\circ + j \sin 150^\circ + \cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \\ &= \frac{1}{3}U_m\left(-j - \frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5\right) = 0. \end{aligned}$$

1b. Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó aszimmetrikus táplálásakor az egyik fázis feszültsége eltér a hálózati fázisfeszültségtől, például az egyik fázis földzárata miatt:

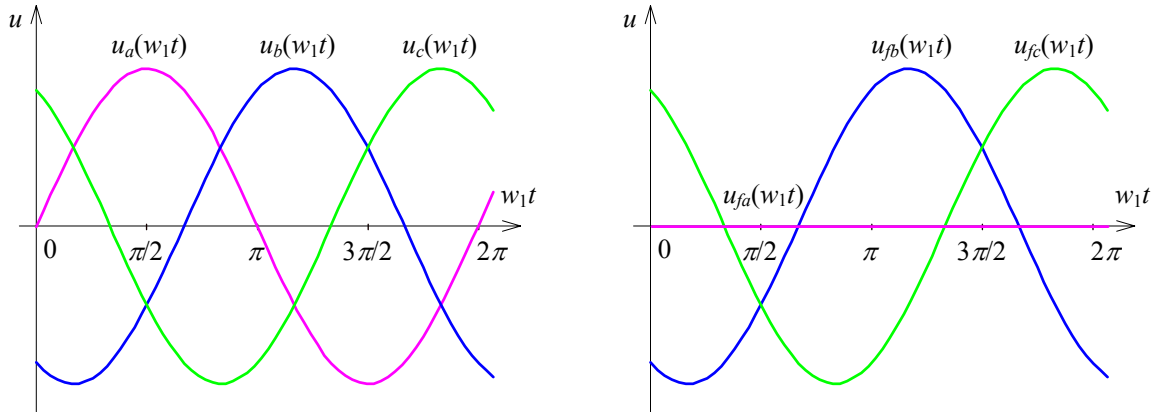
$$\begin{aligned} u_{fa}(w_1t) &\neq u_a(w_1t), u_{fa}(w_1t) = 0, \\ u_{fb}(w_1t) &= u_b(w_1t), \\ u_{fc}(w_1t) &= u_c(w_1t). \end{aligned}$$



Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó aszimmetrikus táplálása - áramköri vázlat

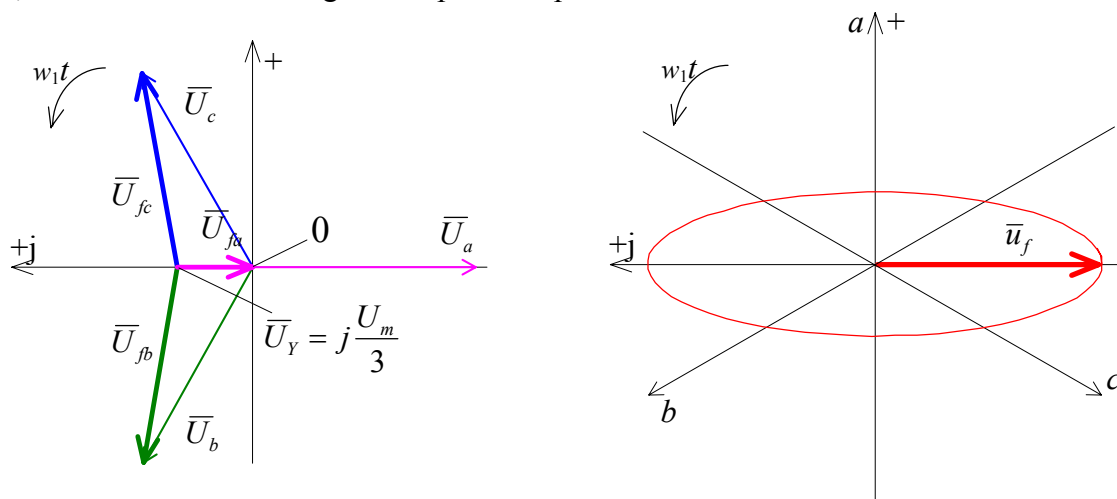
Ebben az esetben a fogyasztó csillagponti feszültsége $u_Y \neq 0$, különbözik a hálózatétól:

$$\begin{aligned}\bar{U}_Y &= \frac{1}{3}(0 + \bar{U}_{fb} + \bar{U}_{fc}) = \frac{1}{3}U_m(e^{j150^\circ} + e^{j30^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}U_m(\cos 150^\circ + j \sin 150^\circ + \cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = \frac{1}{3}U_m\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5\right) = j\frac{U_m}{3}.\end{aligned}$$



A hálózati és a fogyasztói feszültségek időfüggvénye a referencia potenciálhoz viszonyítva

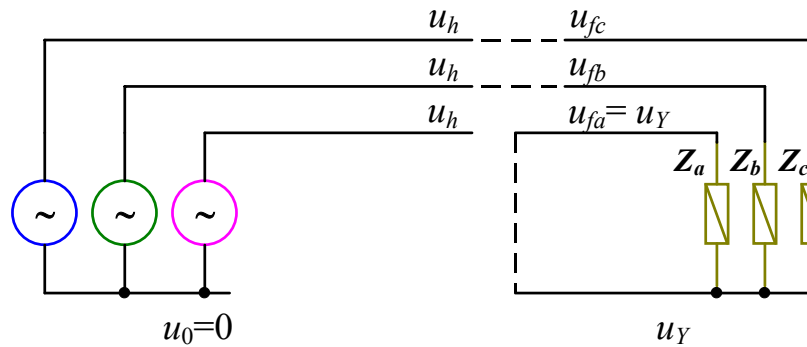
Mivel az „a” fázis Z_a fogyasztójának feszültsége a fogyasztó csillagpontjához képest nem nulla, ezért a Park-vektor diagram elliptikus képet mutat.



Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó aszimmetrikus táplálása - fázorábra és Park-vektor ($t=0$)

1c. Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó kétfázisú táplálásakor az egyik fázisra jutó feszültség nulla, akár rövidre van zárva, akár a „levegőben lóg” (fázis zárlat vagy szakadás). A hibás fázis potenciálja megegyezik a csillagpont potenciáljával:

$$\begin{aligned}u_{fa}(w_1t) &= u_Y(w_1t), \\ u_{fb}(w_1t) &= u_b(w_1t), \\ u_{fc}(w_1t) &= u_c(w_1t).\end{aligned}$$



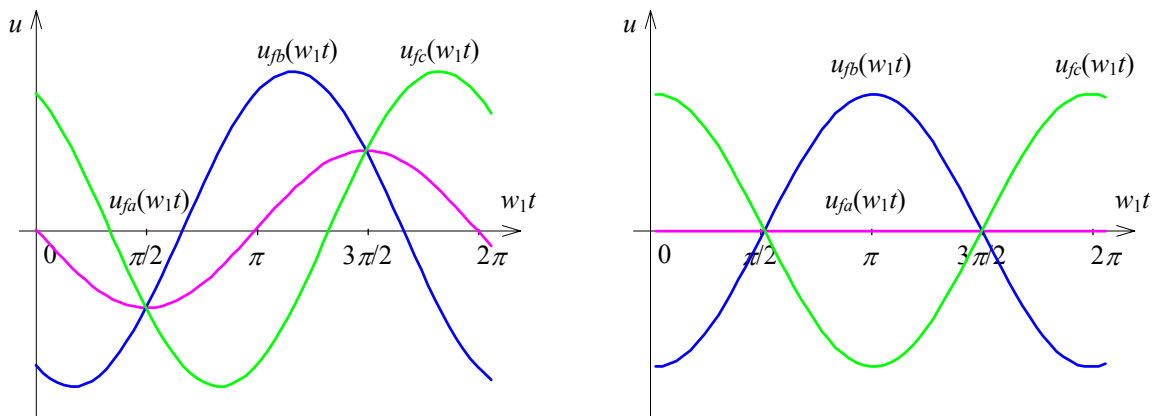
Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó kétfázisú táplálása - áramköri vázlat

A fogyasztó csillagpontjának feszültsége a referencia ponthoz képest:

$$\begin{aligned} \bar{U}_Y &= \frac{1}{3}(\bar{U}_Y + \bar{U}_{fb} + \bar{U}_{fc}) = \frac{1}{3}U_m \left(\frac{\bar{U}_Y}{U_m} + e^{j150^\circ} + e^{j30^\circ} \right) = \\ &= \frac{1}{3}U_m \left(\frac{\bar{U}_Y}{U_m} + \cos 150^\circ + j \sin 150^\circ + \cos 30^\circ + j \sin 30^\circ \right) = \\ &= \frac{1}{3}U_m \left(\frac{\bar{U}_Y}{U_m} + \frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + j0,5 \right) = \frac{1}{3}(jU_m + \bar{U}_Y), \end{aligned}$$

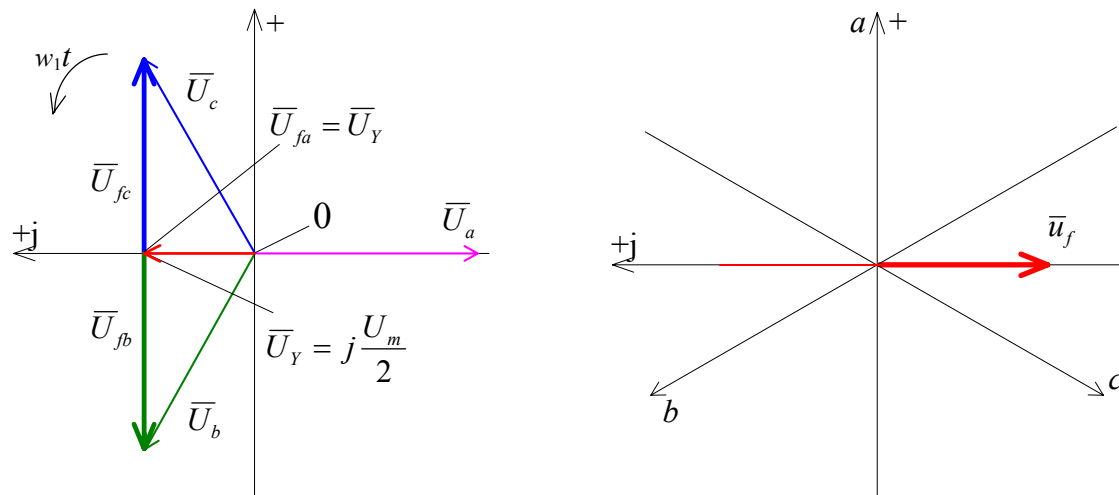
amiből

$$\bar{U}_Y = j \frac{U_m}{2}.$$



A fogyasztói feszültségek időfüggvénye a referencia potenciálhoz és a fogyasztói csillagponthoz viszonyítva

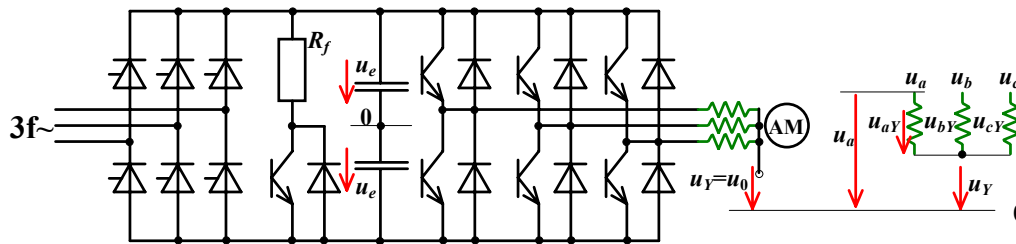
Az „a” fázis Z_a fogyasztójának feszültsége a fogyasztó csillagpontjához képest azonosan nulla, ezért a Park-vektor diagram az árammentes fázis tengelyére merőleges pályát ír le.



Szimmetrikus 3 fázisú fogyasztó kétfázisú táplálása - áramköri fázorábra

A csillagpont eltolódás miatt a b fázis $u_{fb}(w_1t)$ és a c fázis $u_{fc}(w_1t)$ feszültségének amplitúdója az u_{bc} vonali feszültség amplitúdójának a fele $\frac{\sqrt{3}}{2} u_f$ és minden pillanatban $u_{fb}(w_1t) = -u_{fc}(w_1t)$.

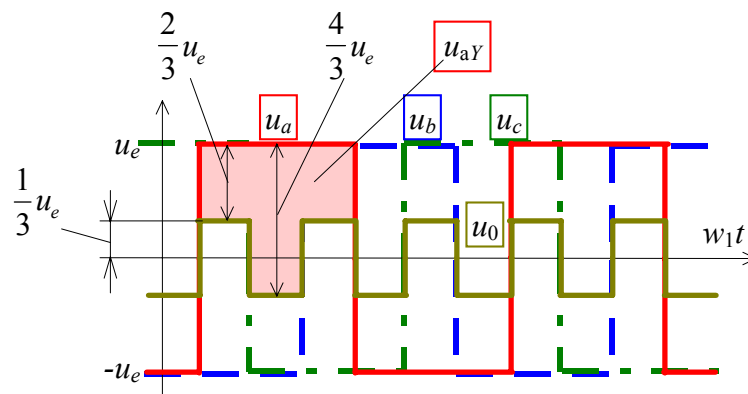
2. Alkalmazási példa: egyszerű inverterről táplált aszinkron motor állandósult állapota



Egyszerű inverterről táplált aszinkron motor áramköri vázlata

Egyszerű inverternél külön válik a kimenő feszültség alapharmonikus amplitúdójának és frekvenciájának változtatása: a feszültség nagyságát a vezérelt egyenirányító gyújtásszöge, vagy a közbülső egyenáramú kör feszültség szabályozója, a frekvenciát az inverter kommutációjának gyakorisága határozza meg (1 periódus alatt 6 kommutáció történik). A motorra jutó (kimenő) feszültség a közbülső egyenfeszültség 0-pontjához, mint referencia ponthoz képest egy háromfázisú négyszöghullám.

Feszültség Park-vektor



Az aszinkron gép feszültségeinek időfüggvénye egyszerű inverteres táplálásnál

Az ábrán

u_e – a közbülső kör (egyen) feszültségének fele,

u_Y – a motor állórész tekercselés csillagpontjának feszültsége a 0-ponthoz képest,

u_{aY}, u_{bY}, u_{cY} – az egyes fázistekercsek feszültsége (a motor csillagpontjához képest),

u_a, u_b, u_c – az egyes fáziskapcsok feszültsége a 0-ponthoz képest.

A fázistekercsekre jutó feszültség a fázis kapcsok és a csillagpont potenciáljának különbsége:

$$u_{aY} = u_a - u_Y,$$

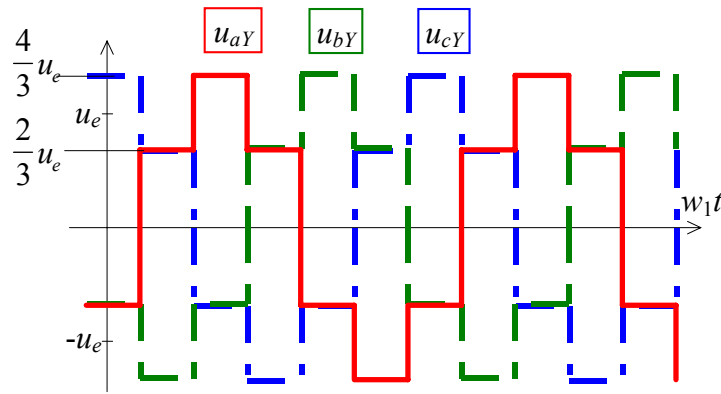
$$u_{bY} = u_b - u_Y,$$

$$u_{cY} = u_c - u_Y.$$

Szimmetrikus motor kialakítás esetén az egyes fázistekercsek impedanciája megegyezik. $Z_a = Z_b = Z_c$, szigetelt csillagpontot feltételezve $i_a + i_b + i_c = 0$, ezért $u_{aY} + u_{bY} + u_{cY} = 0$ és $u_a + u_b + u_c = 3u_Y$.

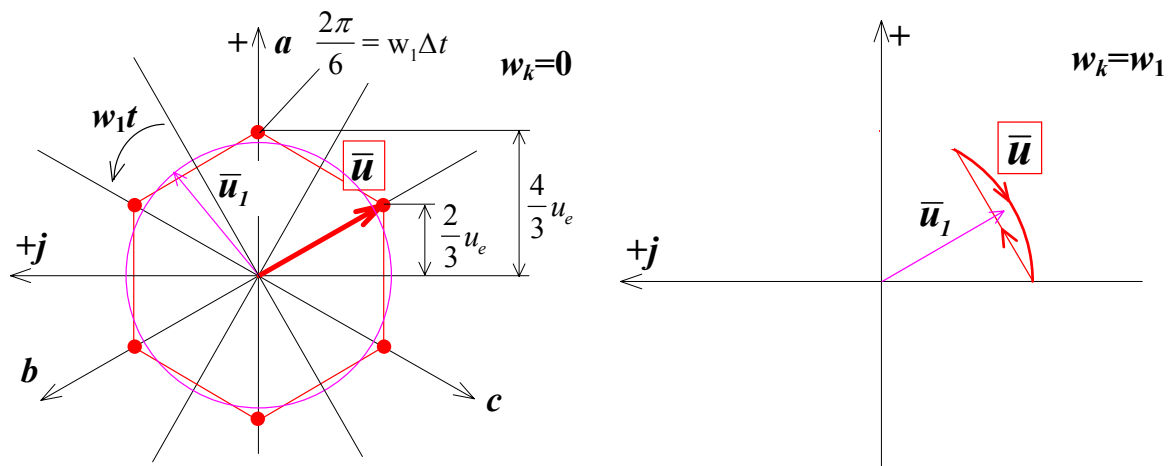
A zérus sorrendű összetevő – a csillagpont eltolódása: $u_Y = u_0 = \frac{u_a + u_b + u_c}{3}$.

Mivel az inverter két kimeneti fázisa minden pillanatban azonos sínhez csatlakozik, a harmadik fázis pedig az ellenkező polaritású sínhez, a zérus sorrendű összetevő $u_0 = \pm \frac{u_e}{3}$.



A fázistekercsek feszültségének időfüggvénye egyszerű inverteres táplálásnál

Park-vektor képzésnél a zérus sorrendű összetevők kiesnek, a Park-vektort az u_a-u_0 , u_b-u_0 és u_c-u_0 feszültségekből kapjuk, tulajdonképpen a csillagponthoz viszonyított u_{aY} , u_{bY} és u_{cY} feszültségekből.



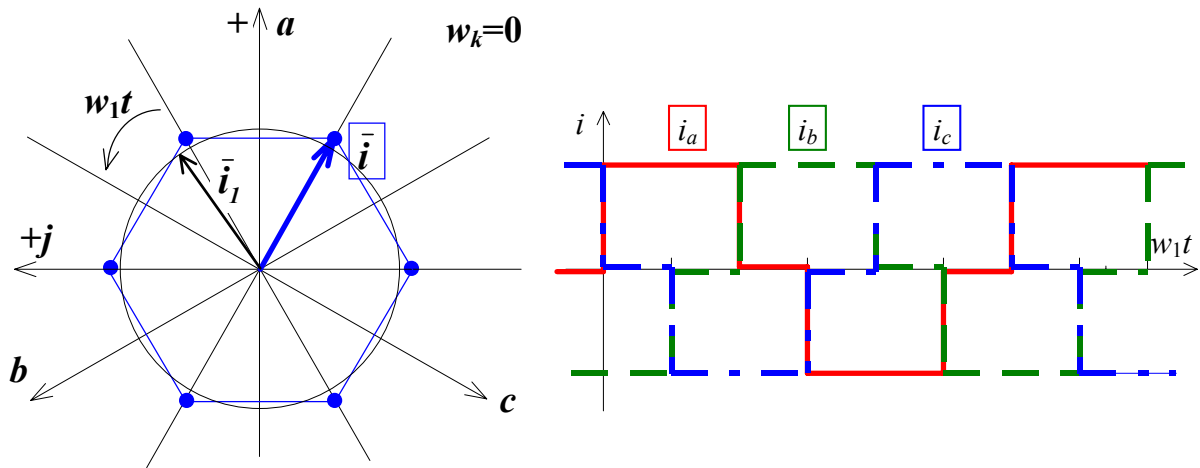
Egyszerű inverterről táplált aszinkron gép kapocsfeszültségének Park-vektor diagramja álló és szinkron forgó koordináta rendszerben

Az ábrán \bar{u}_1 az alapharmonikus feszültség Park-vektora.

Az alapharmonikus feszültség Park-vektora egyenletes sebességgel forgó mozgást végez, míg a teljes \bar{u} feszültség Park-vektora a kommutációk pillanataiban ugrásszerűen változtatja helyzetét, megelőzi az alapharmonikust, majd a következő kommutációig, a $\frac{2\pi}{6}$ szögnek megfelelő Δt ideig egy helyben tartózkodik. $w_k=w_1$ szinkron forgó koordináta rendszerben az álló vektor végpontja egy negatív irányú $\frac{2\pi}{6}$ hosszúságú ívet ír le, míg az alapharmonikus vektor áll.

Áram Park-vektor

Egyszerű inverterről történő táplálásnál kétfázisú vezetés esetén az áramvektor végpontja a vezető fázisok tengelyének szögfelezőjén tartózkodhat (időben állandó áram esetén a képe pont, változó esetén vonal), a nemvezető fázisra eső vetület zérus. A kommutáció (véges) ideje alatt 3 fázisú vezetés van, de a nemkommutáló fázis árama állandó, tehát az áram Park-vektor erre a tengelyre eső vetülete is állandó (a változás a tengelyre merőleges irányú).



Kétfázisú vezetésnél az aszinkron gép
 áram Park-vektor diagramja fázisáramainak időfüggvénye

Az ábrán \bar{i}_1 az alapharmonikus áram Park-vektora.

ISZM inverter

Legegyszerűbb kialakításánál az ISZM (impulzusszélesség modulált) inverter nemvezérelhető (diódás) hálózati egyenirányítót tartalmaz, az inverter oldalon változtatják a feszültség amplitúdóját is és frekvenciáját is. A kimenő feszültség amplitúdójának változtatása (csökkentése) zérus nagyságú feszültségvektor beiktatásával történhet – ilyenkor mindhárom fázistekercset ugyanarra a sínre kapcsolják. A zérus-vektor a koordináta-rendszer középpontjában van. Az ISZM inverter kimenő feszültségének Park-vektor diagramjában az egyszerű inverter 6 feszültségvektorán kívül ez a zérus-vektor is megjelenik.

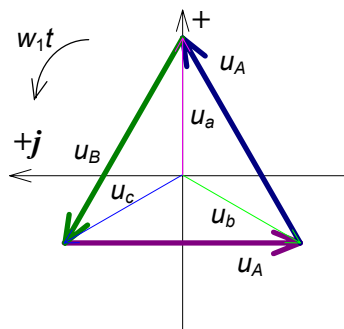
Háromfázisú vonali (láncolt) mennyiségek Park-vektora

Az alább definiált vonali feszültségekből az eddigieknek megfelelően képezhető a vonali feszültségek \bar{u}_v Park-vektora. Az u_A, u_B, u_C vonali feszültségek időfüggvénye

$$u_A(t) = u_b(t) - u_c(t) \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \right.,$$

$$u_B(t) = u_c(t) - u_a(t) \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \bar{a} \right.,$$

$$u_C(t) = u_a(t) - u_b(t) \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \bar{a}^2 \right..$$



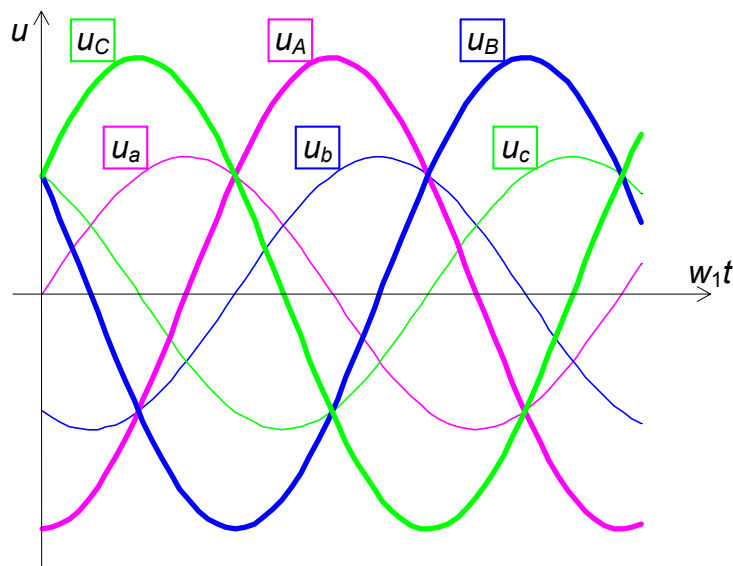
Fázis- és vonali feszültségek

A Park-vektor a definíciós összefüggésnek megfelelően:

$$\begin{aligned}\bar{u}_V(t) &= \frac{2}{3} [u_A(t) + \bar{a}u_B(t) + \bar{a}^2u_C(t)] = \\ &= \frac{2}{3} [u_b(t) - u_c(t)] + \frac{2}{3} \bar{a} [u_c(t) - u_a(t)] + \frac{2}{3} \bar{a}^2 [u_a(t) - u_b(t)] = \\ &= \frac{2}{3} \bar{a}^2 [u_a(t) + \bar{a}u_b(t) + \bar{a}^2u_c(t)] - \frac{2}{3} \bar{a} [u_a(t) + \bar{a}u_b(t) + \bar{a}^2u_c(t)] = (\bar{a}^2 - \bar{a})\bar{u}(t) = -j\sqrt{3}\bar{u}(t).\end{aligned}$$

A $\sqrt{3}$ szorzótényező a vonali- és a fázisfeszültség közötti aránynak megfelelő.

A vonali feszültségek iránya (tengelye) a komplex síkon a megfelelő fázisfeszültségek tengelye felé mutató egységvektorokból határozható meg.



A fázis- és vonali feszültségrendszer időfüggvénye

Az u_A feszültség tengelyének iránya: $\bar{a} - \bar{a}^2 = j\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{j90^\circ}$, tehát az egységvektor $\bar{a}_A = e^{j90^\circ}$,

u_B tengelyének iránya: $\bar{a}^2 - 1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3}e^{j210^\circ} = \sqrt{3}e^{-j150^\circ}$, $\bar{a}_B = e^{-j150^\circ}$,

u_C tengelyének iránya: $1 - \bar{a} = 1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{j330^\circ} = \sqrt{3}e^{-j30^\circ}$, $\bar{a}_C = e^{-j30^\circ}$.

Az egyes vonali feszültségek meghatározása a fázis feszültségek Park-vektorának vetületeként

A fázis feszültségek Park-vektora a komplex összetevőkkel

$$\bar{u} = \text{Re}\{\bar{u}\} + j\text{Im}\{\bar{u}\},$$

amivel kifejezhető a vonali feszültségek Park-vektora

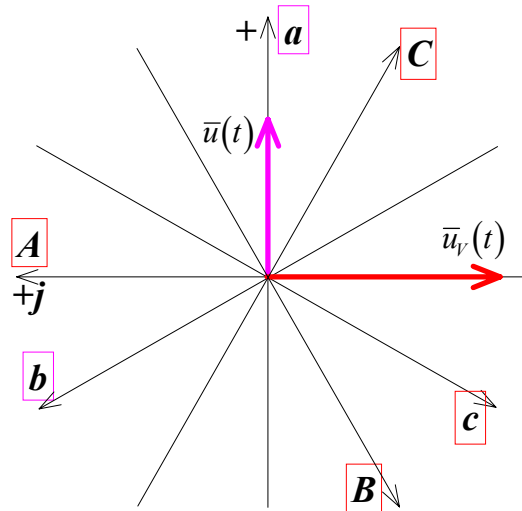
$$\bar{u}_V(t) = -j\sqrt{3}\bar{u}(t) = -j\sqrt{3}\text{Re}\{\bar{u}\} + \sqrt{3}\text{Im}\{\bar{u}\}.$$

A vonali feszültségek pillanatértékét itt is az egyes tengelyekre eső vetület adja, de mivel az A -tengely egybe esik a komplex koordináta rendszer képzetes tengelyével, most a képzetes összetevőket kell meghatározni.

$$u_A(t) = \text{Im}\{\bar{u}_v(t)\} = \text{Im}\{-j\sqrt{3}\bar{u}(t)\} = -\sqrt{3}\text{Re}\{\bar{u}(t)\},$$

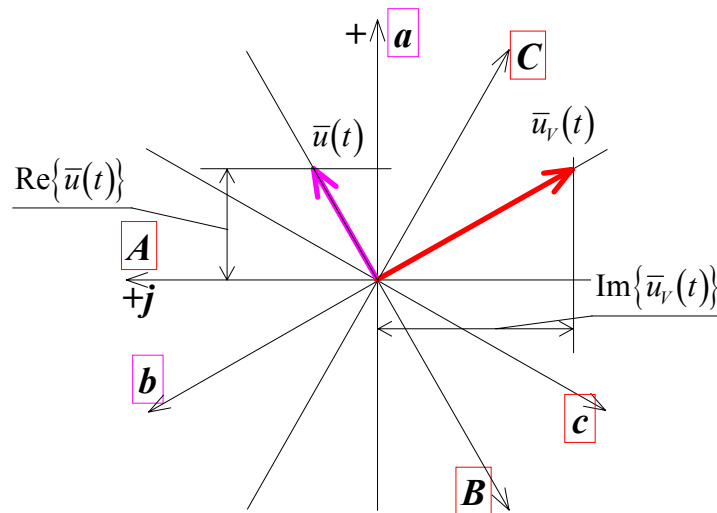
$$u_B(t) = \text{Im}\{\bar{a}^2\bar{u}_v(t)\} = -\sqrt{3}\text{Re}\{\bar{a}^2\bar{u}(t)\},$$

$$u_C(t) = \text{Im}\{\bar{a}\bar{u}_v(t)\} = -\sqrt{3}\text{Re}\{\bar{a}\bar{u}(t)\}.$$



A fázis feszültségek \bar{u} és a vonali feszültségek \bar{u}_v Park-vektora, illetve az A, B, C tengelyek iránya

A vonali feszültségek időfüggvénye grafikusán is meghatározható: egyrészt az $\bar{u}_v(t)$ vonali feszültség Park-vektor, illetve az elforgatott vektor képzetes részével, másrészt az $\bar{u}(t)$ fázis-feszültség Park-vektor, illetve az elforgatott vektor valós vetületének $\sqrt{3}$ -szorosával egyezik meg.



$u_A(t)$ vonali feszültség meghatározása a Park-vektorok vetületeként

A vonaláramok $\bar{i}_v(t)$ Park-vektora hasonlóképpen fejezhető ki a fázisáramok Park-vektorából:

$$\bar{i}_v(t) = -j\sqrt{3}\bar{i}(t)$$

A Park-vektor harmonikus analízise

Nemszinuszos táplálásnál az egyes összetevő harmonikusok hatása egyenként is vizsgálható. Lineáris áramkörök esetében ezek a hatások összegezhetőek, alkalmazható a szuperpozíció módszere. Például aszinkron motornál is, amennyiben a szögsebesség állandó. Az áram és a fluxus felharmonikusai lüktető nyomatékot képezhetnek, továbbá nem elhanyagolható mértékű járulékos vas- és tekercsveszteséget okozhatnak, ezért ismeretük fontos.

A harmonikus összetevők meghatározására több lehetőség van, Park-vektoros tárgyalásnál célszerű a Park-vektor harmonikus analízise.

Az egy fázisok jeleivel végzett harmonikus analízis csak akkor ad helyes eredményt háromfázisú rendszerre, ha a vizsgálandó jelek minden fázisban azonos alakúak és az alapharmonikusok egymáshoz képest 120° -ra eltoltak, aminek következtében a harmonikusok rendszáma és fázissorrendje közötti kapcsolat egyértelmű.

Aszimmetrikus esetben az egyfázisú jelanalízis helyett célszerű 3 fázisút végezni.

A 3 fázisú analízis elve a skalár függvény Fourier-sorának számítási módszeréből kiindulva alakítható ki.

1. Skalár függvény Fourier-sora skalár együtthatókkal

Mint a korábbi tanulmányokból ismert, bármely periodikus, korlátos és szakaszosan folytonos $f(x)$ skalár függvény trigonometrikus (Fourier) sorba fejthető.

Ha az $f(x)$ függvény 2π szerint periodikus, vagyis $f(x) = f(x+2\pi)$, akkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad x - \text{ az általános független változó, váltakozó áramú}$$

rendszerekben pl. $w_1 t$.

A trigonometrikus sor együtthatói:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx, \quad \nu=1, 2, \dots$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x dx, \quad \nu=1, 2, \dots$$

1a Példa

Legyen $f(x)$ egyhullámú szinusz alakú páratlan függvény, amelynek matematikai alakja: $f(x) = A \sin x$.

Skalár függvény analízissel a $[0, 2\pi]$ tartományban a zérus rendű összetevő:

$$a_0 = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

az alapharmonikus ($\nu=1$) komponensek együtthatóinak nagysága:

$$a_1 = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = 0,$$

$$b_1 = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \sin x dx = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x) dx = A,$$

ezekkel az együtthatókkal a függvény: $f(x) = b_1 \sin x = A \sin x$.

1b Példa

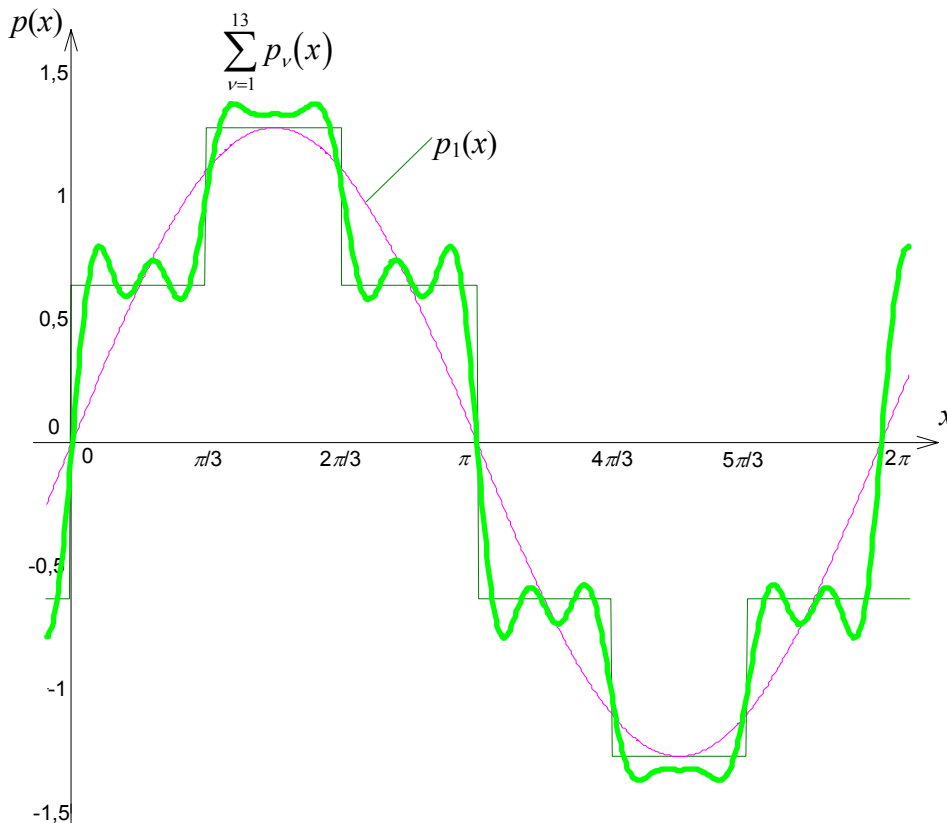
Az analizálandó függvény az egyszerű inverter ideális feszültség Park-vektorának valós vetülete:

$$p(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{ha } 0 < x < \pi/3 \\ 4/3 & \text{ha } \pi/3 < x < 2\pi/3 \\ 2/3 & \text{ha } 2\pi/3 < x < \pi \\ -2/3 & \text{ha } \pi < x < 4\pi/3 \\ -4/3 & \text{ha } 4\pi/3 < x < 5\pi/3 \\ -2/3 & \text{ha } 5\pi/3 < x < 2\pi \end{cases}$$

A harmonikus komponensek:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos v x dx = 0, \quad v=1, 2, \dots$$



Az egyszerű inverter ideális feszültség Park-vektorának valós vetülete és a számított harmonikusok szintézise

$$b_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin v x dx =$$

$$= \frac{2}{3\pi} \left(\int_0^{\pi/3} \sin v x dx + 2 \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin v x dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} \sin v x dx - \int_{\pi}^{4\pi/3} \sin v x dx - 2 \int_{4\pi/3}^{5\pi/3} \sin v x dx - \int_{5\pi/3}^{2\pi} \sin v x dx \right) =$$

$$= \frac{2}{3\nu\pi} \left([-\cos vx]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2[-\cos vx]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + [-\cos vx]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + [\cos vx]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + 2[\cos vx]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} + [\cos vx]_{\frac{5\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \right),$$

$$b_\nu = \begin{cases} \frac{4}{\nu\pi} & \text{ha } \nu = |6k \pm 1|, k=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

A ν . rendszámú összetevő függvény:

$$p_\nu(x) = \frac{4}{\nu\pi} \sin \nu x, \text{ ha } \nu = |6k \pm 1|, k=0, 1, 2, \dots$$

2. Skalár függvény Fourier-sora komplex együtthatókkal

Az Euler összefüggést alkalmazva a skalár függvény Fourier sorának együtthatóira

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$, ebből $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$. Behelyettesítve a sor egyenletébe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_{\nu} \frac{e^{j\nu x} + e^{-j\nu x}}{2} + b_{\nu} \frac{e^{j\nu x} - e^{-j\nu x}}{2j} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_{\nu} (e^{j\nu x} + e^{-j\nu x}) - j b_{\nu} (e^{j\nu x} - e^{-j\nu x}) \right],$$

amit átalakítva

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(a_{\nu} - j b_{\nu}) e^{j\nu x} + (a_{\nu} + j b_{\nu}) e^{-j\nu x} \right].$$

Jelöljük a komplex együtthatókat \bar{c} -vel az alábbiak szerint:

$$\bar{c}_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$\bar{c}_{\nu} = \frac{a_{\nu} - j b_{\nu}}{2} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx - j \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x dx \right], \quad 1 \leq \nu < \infty,$$

$$\bar{c}_{(-\nu)} = \frac{a_{\nu} + j b_{\nu}}{2} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx - j \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x dx \right], \quad -\infty < \nu \leq -1,$$

vagy egységes formulával \bar{c}_{ν} az $f(x)$ függvény Fourier-sorának komplex együtthatója, amit az alábbi integrállal határozhatunk meg:

$$\bar{c}_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-j\nu x} dx \quad -\infty < \nu < \infty.$$

Ezzel a függvény sorának alakja:

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{\nu} e^{j\nu x}.$$

2a Példa

Legyen $f(x)$ egyhullámú szinusz alakú páratlan függvény: $f(x) = A \sin x$.

Komplex függvény analízissel a zérus rendű és az alapharmonikus együtthatók:

$$\bar{c}_0 = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$\bar{c}_1 = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x e^{-jx} dx = \frac{1}{2j} \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{jx} - e^{-jx}) e^{-jx} dx = \frac{1}{2j} \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-2jx}) dx = \frac{A}{2j},$$

$$\bar{c}_{(-1)} = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x e^{jx} dx = \frac{1}{2j} \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{jx} - e^{-jx}) e^{jx} dx = \frac{1}{2j} \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{2jx} - 1) dx = -\frac{A}{2j},$$

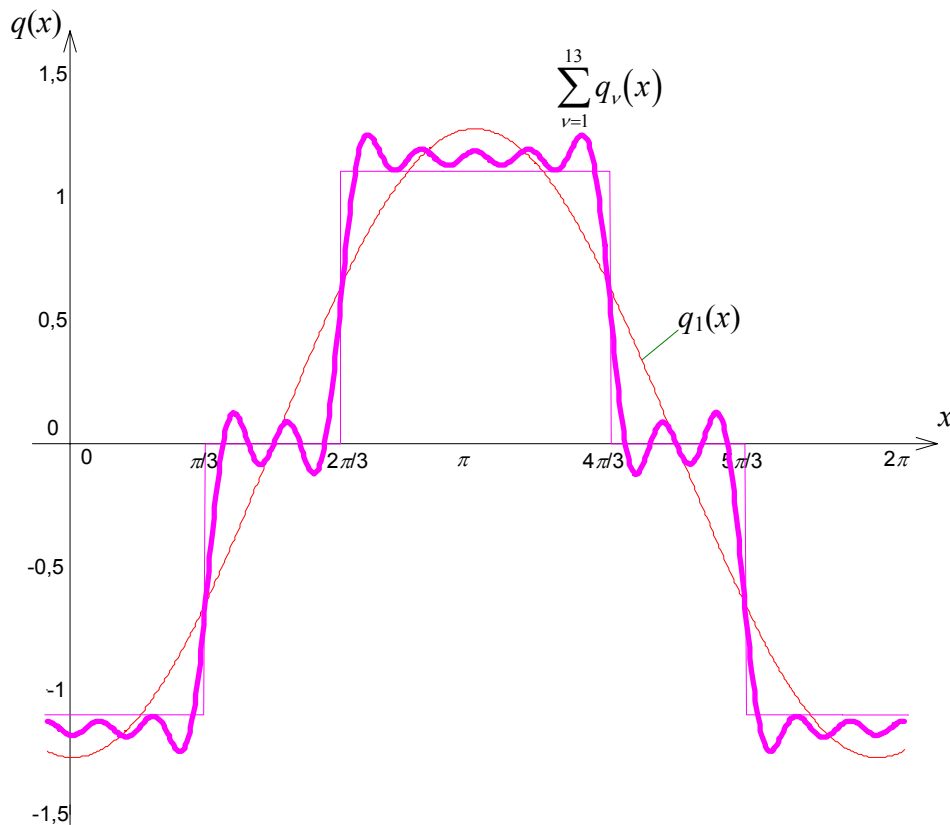
amivel a függvény:

$$f(x) = \frac{A}{2j} e^{jx} - \frac{A}{2j} e^{-jx} = A \sin x.$$

2b Példa

Az analizálandó függvény az egyszerű inverter ideális feszültség Park-vektorának képzetes vetülete:

$$q(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{ha } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \text{ha } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$



Az egyszerű inverter ideális feszültség Park-vektorának képzetes vetülete és a számított harmonikusok szintézise

$$\begin{aligned} \bar{c}_v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) e^{-jvx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-jvx} dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} e^{-jvx} dx - \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} e^{-jvx} dx \right) = \\ &= \frac{1}{jv\pi\sqrt{3}} \left(-\left[e^{-jvx} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[e^{-jvx} \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} - \left[e^{-jvx} \right]_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{jv\pi\sqrt{3}} \left(-1 + e^{-jv\frac{\pi}{3}} - e^{-jv\frac{4\pi}{3}} + e^{-jv\frac{2\pi}{3}} + e^{-jv2\pi} - e^{-jv\frac{5\pi}{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{jv\pi\sqrt{3}} \left(+e^{-jv\frac{\pi}{3}} + e^{-jv\frac{2\pi}{3}} - e^{-jv\frac{4\pi}{3}} - e^{-jv\frac{5\pi}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$\bar{c}_\nu = \begin{cases} -\frac{2}{\nu\pi} & \text{ha } \nu = 6k + 1 \\ \frac{2}{\nu\pi} & \text{ha } \nu = 6k - 1 \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\bar{c}_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad \bar{c}_{(-1)} = -\frac{2}{\pi}, \quad \text{amivel az alapharmonikus } q_1(x) = -\frac{\pi}{2}e^{jx} - \frac{\pi}{2}e^{-jx} = -\frac{4}{\pi}\cos x,$$

$$\text{a } \nu. \text{ harmonikus } q_\nu(x) = -\frac{\pi}{\nu 2}e^{j\nu x} - \frac{\pi}{\nu 2}e^{-j\nu x} = -\frac{4}{\nu\pi}\cos \nu x, \quad \text{ha } \nu=6k\pm 1, \quad k=1, 2, \dots$$

3. A Park-vektor Fourier-sora

Legyen a $\bar{h}(x)$ Park-vektor periodikus, korlátos és szakaszosan folytonos, amelynek komplex összetevői: $\bar{h}(x) = p(x) + jq(x)$. Így $p(x)$ és $q(x)$ skalár függvények is periodikusak, korlátosak és szakaszosan folytonosak, tehát Fourier-sorba fejthetők.

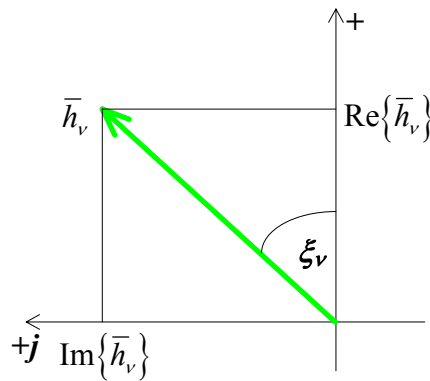
A skalár függvények komplex függvény analízissel kapott együtthatói:

$$p(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{pv} e^{jvx} \text{ és}$$

$$q(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{qv} e^{jvx}.$$

Ezekkel az együtthatókkal a Park-vektor:

$$\bar{h}(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{pv} e^{jvx} + j \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{qv} e^{jvx} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (\bar{c}_{pv} + j\bar{c}_{qv}) e^{jvx}.$$



A Park-vektor v . harmonikus összetevője

Jelöljük a $\bar{h}(x)$ Park-vektor v . harmonikus összetevőjét $\bar{h}_v(x) = \bar{c}_{pv}(x) + j\bar{c}_{qv}(x)$, amivel a Park-vektor:

$$\bar{h}(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \bar{h}_v(x) e^{jvx} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_v(x) e^{j(vx+\xi_v)},$$

itt $h_v = |\bar{h}_v|$ a Park-vektor v . harmonikus összetevőjének abszolút értéke,

$$\operatorname{tg} \xi_v = \frac{\operatorname{Im}\{\bar{h}_v\}}{\operatorname{Re}\{\bar{h}_v\}} \text{ a } v \text{ harmonikus összetevő fázisszöge.}$$

A harmonikus összetevők számítása az előzőeknek megfelelően:

$$\begin{aligned} \bar{h}_v(x) &= \bar{c}_{pv}(x) + j\bar{c}_{qv}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) e^{-jvx} dx + j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) e^{-jvx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p(x) + jq(x)] e^{-jvx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h}(x) e^{-jvx} dx. \end{aligned}$$

3a Példa

Legyen $\bar{h}(x)$ szimmetrikus, háromfázisú, egyhullámú szinusz alakú függvények Park-vektora: $\bar{h}(x) = He^{jx}$.

A Park-vektor Fourier-sorának $\bar{h}_1(x)$ alapharmonikus együtthatója:

$$\bar{h}_1(x) = \frac{H}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jx} e^{-jx} dx = H, \text{ és } \operatorname{tg} \xi_1 = \frac{\operatorname{Im}\{\bar{h}_1\}}{\operatorname{Re}\{\bar{h}_1\}} = 0,$$

amiből a Park-vektor:

$$\bar{h}(x) = h_1(x) e^{j(x+\xi_1)} = He^{jx}.$$

Állandósult szimmetrikus üzemiállapotokban a Park-vektor szimmetrikus sokszög alakú pályát ír le (a kör tulajdonképpen egy végtelen szögű sokszög). g oldalú szimmetria esetén csak

$$v=1 \pm gk \quad k=0, 1, 2, \dots$$

rendszámú harmonikusokat tartalmaz. Háromfázisú esetben leggyakrabban $g=6$, így

$$v=1 \pm 6k \quad v=1, -5, 7, -11, 13, \dots$$

Az ilyen harmonikusokat tartalmazó Park-vektorok pályája tehát g -oldalúan szimmetrikus képet mutat, ezért harmonikus analízisét elegendő a periódus $1/g$ -ed részére elvégezni, mert a görbe g -számú egybevágó szakaszra osztható, és ezek az ívek, szakaszok $2\pi/g$ -szögnyi elforgatással fedésbe hozhatók. A fedés a görbe alakjára és időbeli lefutására is vonatkozik, egy tetszőleges $\bar{h}(x)$ Park-vektorra:

$$\bar{h}\left(x + \frac{2\pi}{g}\right) = \bar{h}(x) e^{j\frac{2\pi}{g}}.$$

A Park-vektor harmonikus összetevőinek számítása ekkor:

$$\bar{h}_v(x) = \frac{g}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{g}} \bar{h}(x) e^{-jvx} dx.$$

Szinkron szögsebességgel forgó koordináta rendszerben végzett analízisnél $\bar{h}(x)$ helyett $\bar{h}(x) e^{-jx}$ az integrálandó függvény, ezért az alapharmonikus zérus sorrendű összetevőként, a -5 . és a 7 . harmonikus pedig negatív és pozitív sorrendű összetevőként jelenik meg. Az alapharmonikus ugyanis szinkron forgó koordináta rendszerben nem változtatja fázisát, a -5 . és a 7 . harmonikus egyenlő szögsebességgel forog vissza, illetve előre a koordináta rendszerhez képest.

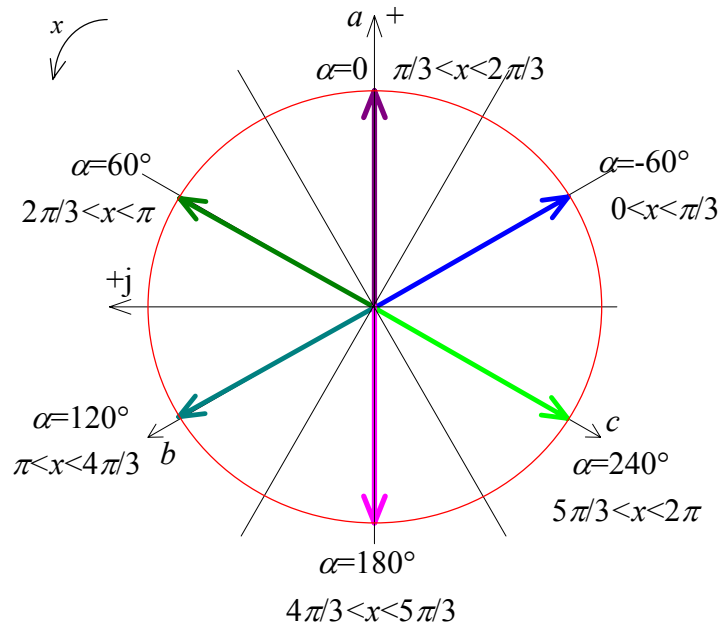
3b Példa

Az egyszerű inverter feszültség Park-vektorának hossza $4u_e/3$, ha u_e a közbülső egyenáramú kör feszültségének fele. Legyen $u_e=1$, így a Park-vektor az ábra szerint az egyes 60° -os tarto-

mányokban: $\bar{u}(x) = \frac{4}{3} e^{j\alpha}$.

$$\bar{h}_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h}(x) e^{-jvx} dx = \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-j60^\circ} e^{-jvx} dx + \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{6}} 1 \cdot e^{-jvx} dx + \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{6}}^{\pi} e^{j60^\circ} e^{-jvx} dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} e^{j120^\circ} e^{-j\nu x} dx + \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} e^{j180^\circ} e^{-j\nu x} dx + \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} e^{j240^\circ} e^{-j\nu x} dx = \\
 & = \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-j\nu\frac{\pi}{3}} - 1}{-j\nu} \left(e^{-j60^\circ} + e^{-j\nu\frac{\pi}{3}} + e^{j60^\circ} e^{-j\nu\frac{2\pi}{3}} + e^{j120^\circ} e^{-j\nu\pi} + e^{j180^\circ} e^{-j\nu\frac{4\pi}{3}} + e^{j240^\circ} e^{-j\nu\frac{5\pi}{3}} \right) = \\
 & = \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-j\nu\frac{\pi}{3}} - 1}{-j\nu} 6e^{j60^\circ} = j \frac{4}{\nu\pi} e^{j60^\circ} \left(e^{-j\nu\frac{\pi}{3}} - 1 \right).
 \end{aligned}$$



Az egyszerű inverter Park-vektorai

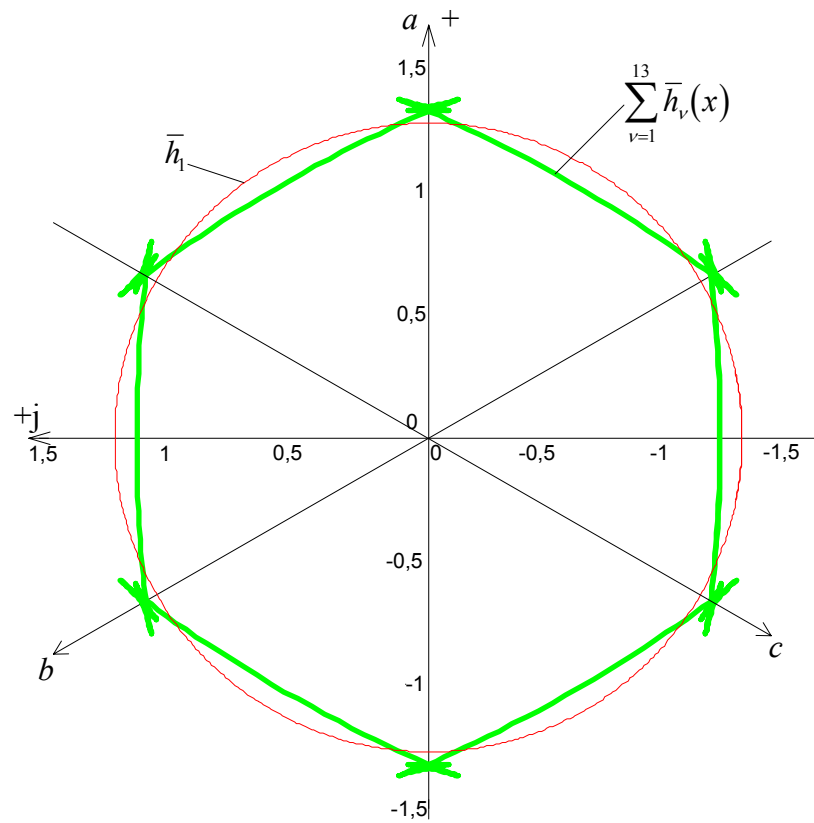
Ebből a Park-vektor ν . összetevő vektora:

$$\bar{h}_\nu(x) = \begin{cases} -j \frac{4}{\nu\pi} & \text{ha } \nu = 1 \pm 6k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

A 6-oldalú szimmetria miatt az integrálást elegendő a periódus 1/6-ára elvégezni:

$$\bar{h}_\nu = \frac{6}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{6}} \bar{h}(x) e^{-j\nu x} dx = \frac{4}{3} \frac{6}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{6}} e^{-j60^\circ} e^{-j\nu x} dx = j \frac{4}{3} \frac{6}{2\nu\pi} e^{-j60^\circ} \left(e^{-j\nu\frac{\pi}{3}} - 1 \right) = j \frac{4}{\nu\pi} e^{-j60^\circ} e^{-j120^\circ},$$

$$\bar{h}_\nu = -j \frac{4}{\nu\pi}, \quad \nu = 1 \pm 6k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Az egyszerű inverter ideális feszültség Park-vektora a számított harmonikusok szintézise alapján

Összeállította: Kádár István
2016. április

Ellenőrző kérdések

1. Milyen követelmények teljesítését feltételezzük Park-vektor alkalmazásánál a mágneses mező térbeli eloszlására és időbeli változására?
2. Milyen mágneses mező alakul ki a légrésben, ha az állórész egyik tekercsét egyenárammal, vagy időben tetszőleges lefolyású árammal tápláljuk?
3. Zérus sorrendű összetevők jelenléte hogyan befolyásolja a Park-vektor alkalmazását?
4. A Park-vektor ismeretében hogyan határozható meg a fázismennyiségek pillanatértéke számítással és grafikusán?
5. A fázismennyiségek pillanatértékének meghatározásánál hogyan veszik számításba a zérus sorrendű összetevőket?
6. Írja fel egy 90% pozitív és 10% negatív sorrendű összetevőt tartalmazó 3 fázisú feszültség rendszer Park-vektorát.
7. 3 fázisú, szimmetrikus, szinuszos időbeli lefolyású jelek esetén milyen kapcsolat van a Park-vektor nagysága (hossza) és a fázismennyiségek között?
8. A Park-vektor diagram ábrázolásához milyen célszerű koordináta rendszereket alkalmaznak?
9. Hogyan osszcillografálható az álló koordináta-rendszerbeli Park-vektor?
10. Hogyan osszcillografálható a Park-vektor szinkron forgó koordináta rendszerben?
11. Hogyan definiálják vonali feszültségek Park-vektorát?
12. A fázis mennyiségek Park-vektorából hogyan számítható a vonali feszültségek Park-vektora?
13. Mi a különbség egy időbeli fázor és egy Park-vektor között?
14. Milyen kapcsolat van a szimmetrikus összetevők és a Park-vektor között?
15. Mutassa be, hogy egyszerű (nem ISZM) feszültséginverteres táplálásnál milyen a fázisfeszültség időfüggvénye az inverter egyenáramú körének középpontjához képest.
16. Mutassa be, hogy egyszerű (nem ISZM) feszültséginverteres táplálásnál milyen a fázisfeszültség időfüggvénye a motor csillagpontjához képest.
17. Illusztrálja, hogy milyen pályát írhat le az áram Park-vektora, ha az a fázis árammentes.
18. Értelmezze a skalár függvény skalár együtthatós Fourier-sorát.
19. Értelmezze a skalár függvény komplex együtthatós Fourier-sorát.
20. Értelmezze a Park-vektor (Park-vektoros) Fourier-sorát.
21. Harmonikus analízisnél milyen egyszerűsítésre ad lehetőséget egy 6-oldalúan szimmetrikus Park-vektor diagram?