Keresztfélév - 2. vizsga

A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. a) Mikor nevezünk egy valószínűségi változót abszolút folytonosnak?

   b) Hogyan definiáljuk két valószínűségi változó kovarianciáját? (Az állításon elhangzott definíció és a kovariancia kiszámítására tipikusan alkalmazott (szintén előadáson szerepelt) formula is elfogadható.)

2. Egy urnában 2 fehér és 2 piros golyó van. Addig húzunk egyesével és visszatvés nélkül az urnából, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a szükséges húzások számát. Adjuk meg az X eloszlását, várható értékét és szórását.

3. Egy telefonfülkéből szeretnénk hívást indítani, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Tegyük fel, hogy az illető telefonbeszélgetésének időtartama percben mérve folytonos, örökifjú eloszlású 3 várható értékkel. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés további 3 percnél tovább tart, feltéve, hogy 3 percnél tovább tartott?

4. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

   a) Függetlenek-e az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 2\}$ események?

   b) Függetlenek-e az $\{X < 2\}$ és $\{Y < 2\}$ események?

   c) Függetlenek-e az X és Y változók?

Y \ X	0	1	2
0	1/10	1/10	1/10
1	1/10	1/10	3/10
2	1/20	1/20	1/10

5. Legyenek X és Y valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója $\frac{3}{2}Y + 2$, míg az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $\frac{1}{2}X - 1$.

   a) Határozzuk meg az X és Y változók várható értékét.

   b) Határozzuk meg Y szórásnégyzetét, ha tudjuk, hogy X szórásnégyzete 6.

6. Egy vizsgán 50 kérdésre kell válaszolni, minden kérdés esetén négy lehetséges válasz közül lehet választani, melyekből pontosan egy helyes. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó minden előzetes tudás nélkül tölti ki a sort, és minden egyes kérdésnél függetlenül és véletlenszerűen tippeli meg a választ. Adjuk meg az általa adott helyes válaszok eloszlását. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy több, mint 20 helyes választ ad így?

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ v. $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p$, p	-	p	$p(1-p)$
binomiális	$B(n;p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np	$np(1-p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$U(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{1}{b-a}$ (ha $t\in(a;b)$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$Exp(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\lambda e^{-\lambda t}$ (ha $t\in(0;\infty)$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$N(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

A Student-eloszlás kvantiliseinek táblázata

	Szignifikanciaszint $(1-\varepsilon)$				
Szabadsági fok	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,657**	**636,619**
2	**2,920**	**4,303**	**6,965**	**9,925**	**31,599**
3	**2,353**	**3,182**	**4,541**	**5,841**	**12,924**
4	**2,132**	**2,776**	**3,747**	**4,604**	**8,610**
5	**2,015**	**2,571**	**3,365**	**4,032**	**6,869**
6	**1,943**	**2,447**	**3,143**	**3,707**	**5,959**
7	**1,895**	**2,365**	**2,998**	**3,499**	**5,408**
8	**1,860**	**2,306**	**2,896**	**3,355**	**5,041**
9	**1,833**	**2,262**	**2,821**	**3,250**	**4,781**
10	**1,812**	**2,228**	**2,764**	**3,169**	**4,587**
11	**1,796**	**2,201**	**2,718**	**3,106**	**4,437**
12	**1,782**	**2,179**	**2,681**	**3,055**	**4,318**
13	**1,771**	**2,160**	**2,650**	**3,012**	**4,221**
14	**1,761**	**2,145**	**2,624**	**2,977**	**4,140**
15	**1,753**	**2,131**	**2,602**	**2,947**	**4,073**
16	**1,746**	**2,120**	**2,583**	**2,921**	**4,015**
17	**1,740**	**2,110**	**2,567**	**2,898**	**3,965**
18	**1,734**	**2,101**	**2,552**	**2,878**	**3,922**
19	**1,729**	**2,093**	**2,539**	**2,861**	**3,883**
20	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,850**
21	**1,721**	**2,080**	**2,518**	**2,831**	**3,819**
22	**1,717**	**2,074**	**2,508**	**2,819**	**3,792**
23	**1,714**	**2,069**	**2,500**	**2,807**	**3,768**
24	**1,711**	**2,064**	**2,492**	**2,797**	**3,745**
25	**1,708**	**2,060**	**2,485**	**2,787**	**3,725**
26	**1,706**	**2,056**	**2,479**	**2,779**	**3,707**
27	**1,703**	**2,052**	**2,473**	**2,771**	**3,690**
28	**1,701**	**2,048**	**2,467**	**2,763**	**3,674**
29	**1,699**	**2,045**	**2,462**	**2,756**	**3,659**
30	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,646**
40	**1,684**	**2,021**	**2,423**	**2,704**	**3,551**
50	**1,676**	**2,009**	**2,403**	**2,678**	**3,496**
60	**1,671**	**2,000**	**2,390**	**2,660**	**3,460**
80	**1,664**	**1,990**	**2,374**	**2,639**	**3,416**
100	**1,660**	**1,984**	**2,364**	**2,626**	**3,390**
500	**1,648**	**1,965**	**2,334**	**2,586**	**3,310**

A sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998