ANALÍZIS(1) **I. ZÁRTHELYI** **1998. március 19.**

Műszaki Informatika szak A csoport Munkaidő: 90 perc

BME, Természet- és Társadalomtudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. Feladat (10 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x^2}{2x^2+3y^2} = ?$$

2. Feladat (10 pont)

Forgassa meg az (x,z) sík $z = \operatorname{ch} x$ görbéjét a z tengely körül. Adja meg a kapott forgásfelületet egy kétváltozós függvény grafikonjaként! Mennyi ennek a függvénynek az x szerinti parciális deriváltja az $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ pontban?

3. Feladat (20 pont)

Legyen $f(x,y) = xy + y^2 + 3x^2 - 6x + 7y, \quad P(0,0), \quad \underline{v}^T = (2,-1)$.

a) Indokolja meg, hogy f totálisan differenciálható! $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}\right|_P = ?$

b) Írja le a kétváltozós függvény iránymenti deriváltjának definícióját, és számolja ki ennek alapján is a $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}\right|_P$ értékét!

4. Feladat (20 pont)

Határozza meg az $f(x,y) = 2x + y + \dfrac{4}{xy}$ függvény lokális maximum ill. minimum helyeit, amennyiben vannak egyáltalán!

5. Feladat (12 pont)

a) Milyen típusú differenciálegyenlet az $y' - \dfrac{y}{x} = 2\sin x, \quad x > 0$, milyen alakú az általános megoldása?

b) Mutassa meg, hogy $y_p = 2x \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ megoldása ennek a differenciálegyenletnek!

c) Írja fel az általános megoldást! (y_p nem hozható egyszerűbb alakra!)

6. Feladat (8 pont)

Vezesse be az $u = y - 3x$ új változót, majd keresse meg az $y' = (y-3x)^2, \quad y\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ kezdetiérték probléma egy megoldását!

7. Feladat (20 pont)

Legyen $y' = y^3 - \mathrm{e}^{3x}$.

a) Igaz-e, hogy ennek a differenciálegyenletnek minden ponton át halad megoldásgörbéje?

b) Milyen szög alatt metszi az y tengelyt az $x_0 = 0,\ y_0 = \sqrt[3]{2}$ ponton áthaladó megoldásgörbe?

c) Mely pontokon áthaladó megoldásgörbéknek van lokális maximuma ill. minimuma éppen a szóbanforgó pontban?

Pótfeladat:

8. Feladat (10 pont)

Oldja meg:

$$y' = \frac{3y^2+4}{y\,(2x+5)}, \qquad x, y > 0$$

differenciálegyenletet!

ANALÍZIS(1) **I. ZÁRTHELYI** **1998. március 19.**

Műszaki Informatika szak B csoport Munkaidő: 90 perc

BME, Természet- és Társadalomtudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. Feladat (15 pont)

a) $y' - \dfrac{2y}{x} = 0 \qquad y(x) = ?$

b) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3 \qquad y(x) = ?$

2. Feladat (10 pont)

Hajtsa végre az $u = xy^3$ helyettesítést a

$$3xy^2y' - y^3 = x^3$$

differenciálegyenletnél! A kapott egyenletet nem kell megoldania!

3. Feladat (18 pont)

$$y' = x^2 + y^2 - 2xy$$

a) Rajzolja fel az $(1, 2)$ ponton áthaladó izoklínát! (Rajzoljon be néhány vonalelemet is!)

b) A differenciálegyenlet megoldása nélkül vizsgálja meg, hogy hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásgörbéknek! Ahol van, ott milyen jellegű a lokális szélsőérték?

4. Feladat (17 pont)

$$f(x, y) = x^2 - 6x + 1 + \frac{y^3}{3} - 3y$$

a) Határozza meg a függvény lokális szélsőértékeit!

b) Létezik-e $\min\limits_{(x,y)\in T} \{f(x, y)\}$ ill. $\max\limits_{(x,y)\in T} \{f(x, y)\}$, ha $T: \ y \le x, \ y \ge 0, \ x \le 5$? Ha igen, határozza meg!

5. Feladat (18 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Hol folytonos az f függvény?

b) Adja meg $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ definícióját, és ennek alapján határozza meg $f'_x(0, 0)$ és $f'_y(0, 0)$ értékét!

c) Deriválható-e f a $(0, 0)$-ban?

6. Feladat (14 pont)

$$f(x, y) = \frac{e^{2y-1}}{x^2+1}$$

a) Hol létezik $\operatorname{grad} f$? Ahol létezik, írja fel!

b) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ? \qquad P_0\left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad \underline{e} \parallel 3\underline{i} - 4\underline{j}$

7. Feladat (8 pont)

$$h(x,y) = f(xy^2), \qquad f \in C^2_{\mathbb{R}} \qquad\qquad h'_x = ? \qquad h''_{xy} = ?$$

Pótkérdés:

8. Feladat (10 pont)

$$f(x,y) = xy^2 \mathrm{e}^{2x} \qquad\qquad f'_x = ? \qquad f'_y = ?$$

Írja fel a $P_0(1,-1)$ pontbeli érintősík egyenletét!