Matematika A2 2. vizsga

2021. január 6.

1. (a) ”Az emberiségnek nincs jövője, ha nem tesz mindenki többet a bolygóért.” Formalizáljuk az állítást logikai műveletek és kvantorok segítségével, és írjuk fel a tagadását.

   (b) Írjuk fel a paraméteres egyenletrendszerét az $x = 2t - 1, y = 1 - t, z = 1 + 3t$ és $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{4-z}{5}$ egyenesekre merőleges, és azok metszéspontján áthaladó egyenesnek.

   Megoldás

   (a) A: az emberiségnek van jövője, $B(x)$: x többet tesz a bolygóért (**2 pont**), ekkor $\neg(\forall x(B(x))) \Rightarrow \neg A$, vagyis $\forall x(B(x)) \vee \neg A$ (**2 pont**), melynek tagadása $A \wedge \neg(\forall x(B(x)) \equiv A \wedge \exists x(\neg B(x))$(**3 pont**), vagyis az emberiségnek úgy is lehet jövője, ha van olyan ember, aki nem tesz többet a bolygóért.(**1 pont**)

   (b) A $\frac{2t-1-1}{3} = \frac{1-t}{2} = \frac{4-(1+3t)}{5}$ egyenleteket a $t = 1$ paraméter elégíti ki, így a két egyenes metszéspontja: $(1, 0, 4)$ (**4 pont**). A keresett egyenes irányvektora a megadott egyenesek irányvektorának vektoriális szorzata, vagyis:

   $$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1, 19, 7), \qquad (\mathbf{4\ pont}),$$

   tehát az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = -t + 1, y = 19t, z = 7t + 4$. (**2 pont**)

2. (10+10 pont)

   (a) Adjuk meg az $\dfrac{z}{\overline{z}} = i$ egyenlet megoldásait.

   (b) Mennyi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2-3}\right)^{n^2+3}$?

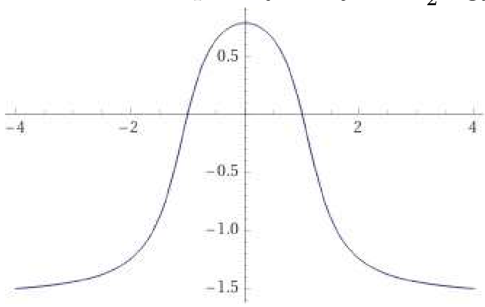
   Megoldás

   (a) Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor $\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ (**4 pont**), és $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ (**2 pont**), tehát r tetszőleges (**1 pont**), és $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, így $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$(**2 pont**), vagyis $z = a + ai$ $(a \in \mathbb{R})$(**1 pont**).

   (b) $\displaystyle\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-3}\right)^{n^2+3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{n^2}\right)^{n^2}}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-3}\right)^3 \to \frac{e}{e^{-\frac{3}{2}}} \cdot 1^3 = e^{\frac{5}{2}}$ (**5+4+1 pont**)

3. (20 pont) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk az $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^2)$ függvényt.

Megoldás. I. $D_f = \mathbb{R}$ (**1 pont**)
II. $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = 0$, ha $x = \pm 1$ (**2 pont**)
III. így a függvény nem periodikus, de $\operatorname{arctg}(1-(-x)^2) = \operatorname{arctg}(1-x^2)$,így a függvény páros (**2 pont**)
IV. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ (**2 pont**).
V. Monotonitás: $f'(x) = \dfrac{-2x}{1+(1-x^2)^2} = \dfrac{-2x}{x^4-2x^2+2}$ (**2 pont**) zérushelye 0 (**1 pont**), tehát f monoton nő a $(-\infty, 0)$ intervallumon, és monoton csökkenő az $(0, \infty)$ intervallumon (**2 pont**).
VI. konvexitásvizsgálat: $f''(x) = -2 \cdot \dfrac{x^4-2x^2+2-x(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+2)^2} = 2 \cdot \dfrac{3x^4-2x^2-2}{(x^4-2x^2+2)^2}$ (**2 pont**) zérushelyei $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ (**1 pont**), tehát f konvex a $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$ és $\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$ intervallumon, és konkáv a $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$ intervallumon (**2 pont**).
VII. $\pm\infty$-ben aszimptotája az $y = -\frac{\pi}{2}$ egyenes, ∞-ben nincs aszimptotája (**1 pont**)

VIII. 

IX. $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (**1+1 pont**)

4. (20 pont) Mennyi $\displaystyle\int_{-1}^{0} \arcsin\frac{x}{2}\,dx$?

Megoldás. Parciális integrálással

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \qquad (\textbf{10 pont})$$

tehát $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx = x\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + c$ (**5 pont**),
így $\displaystyle\int_{-1}^{0} \arcsin\frac{x}{2}\,dx = 2 - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$ (**5 pont**)

5. (20 pont) Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ függvény szakadási helyeit és azok típusát.

Megoldás. A számlálóban és a nevezőben folytonos függvények állnak, így csak a nevező zérushelyeiben lesz szakadása a függvények (**2 pont**). A nevező csak az $x = 0$ pontban 0, hiszen $(x - \sin x)' = 1 - \cos x > 0$, ha $x \neq 2k\pi$, tehát az $x - \sin x$ függvény minden intervallumon szigorúan monoton növő (**5 pont**).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

(mindhárom l'Hospital szabály (**3 pont**), a határérték (**1 pont**)), így a függvénynek a 0 pontban megszüntethető szakadása van (**3 pont**)

IMSC. (8 pont) Hány valós zérushelye van az $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt[4]{t^6 + 2}}\, dt$ függvénynek? Korlátos-e a függvény értékkészlete?

Megoldás. $F(1) = 0$, és $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^6+2}} > 0$, tehát F szigorúan monoton növő, így csak egy zérushelye van.(**4 pont**) $0 \leq \frac{1}{\sqrt[4]{t^6+2}} \leq \frac{1}{t^{6/4}}$ így a függvény határtéke $\pm\infty$-ben véges, így az értékkészlet korlátos. (**4 pont**)