Kalkulus vizsga 2 MO

2021. jan

1. a) (10p)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-4}{n+2}\right)^{n+1} = \overbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-4}{n+2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n-4}{n+2}\right)^{1}}^{①} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n}\cdot\frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}} =$$

$\frac{4}{n}\to 0$, $\frac{2}{n}\to 0$ ② $\to 1/1$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{-4}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}} = \underline{\underline{e^{-6}}} \ ②$$

$\left(1+\frac{-4}{n}\right)^{n} \xrightarrow{②} e^{-4}$

$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} \xrightarrow{②} e^{2}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$ ①

1. b) (10p)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n^2+6}$$

Rendőr-elvvel: ②

$$\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \sqrt[n]{2n^2} \le \sqrt[n]{2n^2+6} \overset{②}{\le} \sqrt[n]{2n^2+6n^2} = \sqrt[n]{8n^2} = \sqrt[n]{8}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$

$0 \le 6$ $\qquad$ $6 \le 6n^2$, $n\in\mathbb{N}^+$

$\sqrt[n]{2}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$ ②: $\underbrace{1\cdot 1^2}\to 1$

$\sqrt[n]{8}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$ ②: $\underbrace{1\cdot 1^2}\to 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{2n^2+6}\longrightarrow 1$$

(ha $n\to+\infty$)

2.) 10p

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4x^2-x+1}{2x^5-x^3} = \lim_{-\infty}\boxed{\frac{x^3}{x^5}}\cdot\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-1/x^2} = 0\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{0}}$$

dom. ① (x^3), dom. ① ($2x^5$)

kiemel: ③

$\frac{4}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$, $\frac{1}{x^3}\to 0$, $1/x^2\to 0$ ②

$\frac{x^3}{x^5} = \frac{1}{x^2} \to "\frac{1}{\infty}" = 0$ ②

$\frac{1}{x^\alpha}\to 0$ ①

alpha>0

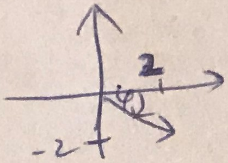
3.) (15p) $(2i-3)\cdot z^2 = -2+10i \quad /:(2i-3)$ (1)

$$z^2 = \frac{-2+10i}{2i-3} = \frac{-2+10i}{-3+2i}\cdot\frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{(-2+10i)(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2} =$$ (2)

$$= \frac{6+4i-30i+20}{9+4} = \frac{26-26i}{13} = 2-2i \Rightarrow z^2 = 2-2i$$ (3)

Kell: $w = 2-2i$ trigonometrikus alakja: (1)

$|w| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$ (2)



$\varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$ (2)

w négyzetgyökei:

$$z_n = \sqrt{\sqrt{8}}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\pi/4+n\cdot 2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\pi/4+n\cdot 2\pi}{2}\right)\right)$$ (2)

$n=0,1$

Tehát

$$z_0 = \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$ (2)

4.) (20p) $f(x) = x - \frac{4}{x}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

T: Ha f diff.-ható és $f'>0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. nő I-n

(2) — " — és $f'<0$ I-n $\Rightarrow$ f szig. mon. fogy I-n

Nézzük: $f'(x) = (x-4\cdot x^{-1})' = 1+4\cdot x^{-2} \overset{(2)}{=} 1+\frac{4}{x^2} \overset{(2)}{>} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tehát f szig. mon. növő $(-\infty,0)$-n és $(0,+\infty)$-n. (2)

f diff.-ható, így ott lehet szélsőértékhelye,

ahol $f'(x)=0$. (3)

De $\forall x\in D_f$ esetén $f'>0$, így f-nek nincs

szélsőértékhelye. (2)

inflexiós pontja csak ott lehet f-nek, ahol konvexitást vált, ehhez $f''(x)=0$ szükséges feltétel (ha f kétszer diff-ható). 2

így kell: $f''(x) = (1+4\cdot x^{-2})' = \underbrace{-8x^{-3} = \frac{-8}{x^3}}_{2} \overset{1}{\neq} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Tehát f-nek nincs inflexiós pontja. 2

5.) a) (12p)

$$\int \underbrace{(x-5)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{g'(x)} dx = \overbrace{(x-5)\cdot\frac{e^{2x}}{2}}^{2} - \overbrace{\underbrace{\int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}}_{\frac{e^{2x}}{4}}}^{2} \ominus$$

1

$f'(x) = 1$ 1 $\quad g(x) = \int e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2}$ 1

↳ lin. hely. int. 1

$\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a}$, ahol $\int f = F$.

parciális integrálás:

$$\underbrace{\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g}_{2}$$

2

$$\ominus\ (x-5)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \quad C\in\mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

b) (8p)

Newton-Leibniz

$$\int_0^1 (x-5)\cdot e^{2x}\,dx \overset{1}{\underset{3}{=}} \left[\frac{e^{2x}}{2}\cdot\underbrace{\left(x-5-\frac{1}{2}\right)}_{\left(x-\frac{11}{2}\right)}\right]_{x=0}^{1} =$$

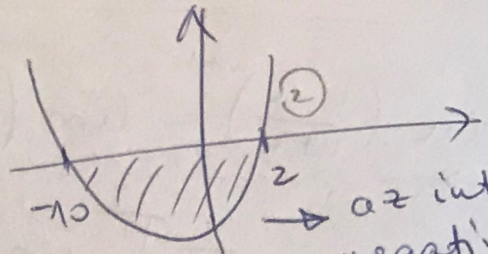
$$\left[\frac{e^{2x}}{4}\cdot(2x-11)\right]_{x=0}^{1} = \frac{e^2}{4}\cdot(-9) - \frac{1}{4}\cdot(-11) = \frac{1}{4}(11-9e^2)$$

5

6) (15p) $f(x) = x^2+8x-20$, $a=1>0 \Rightarrow \cup$

$x^2+8x-20=0$

$x_{1,2} = \dots \big\langle\begin{matrix}2\\-10\end{matrix}$ (2)



→ az integrál negatív területet fog adni! (2)

$$\int_{-10}^{2} x^2+8x-20\,dx \overset{N.-L.}{=} \left[\frac{x^3}{3}+4x^2-20x\right]_{x=-10}^{2} =$$

(2) (3)

$$= \frac{2^3}{3}+4\cdot 2^2-20\cdot 2-\left(\frac{(-10)^3}{3}+4\cdot(-10)^2-20\cdot(-10)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}+16-40+\frac{1000}{3}-400-200$$

$$336+16-40-400-200 = \underline{\underline{-288}}$$ (4)

Így a korlátos síkidom területe: 288 ter. egység (1)

+ Fel: (15p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

III + I. sor (3) III + 4·II (3)

A lépések során, nem változott meg a mtx determinánsa
egyik sorhoz a másik λ-szorosát adtam

Tehát det A = a főátlóbeli elemek szorzata = $4\cdot 2\cdot(-1) = \underline{\underline{-8}}$ (3)

Mivel det A ≠ 0 ⇒ ∃ A^{-1} (3)

A mtx-on elemi sorműveleteket végeztünk (Gauss-elim.) ⇒ A rangja =
a nem csupa 0 elemből álló sorok száma = $\underline{\underline{3 = r(A).}}$ (3)
a felső-háromszög alakra hozás után