Felsőbb Matematika 1. ZH 2013-10-30

1. Oldjuk meg az együtthatómátrix PLU-felbontását meghatározva és azt fölhasználva a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert! *(3 pont)*

2. Diagonalizáljuk ortogonálisan az $\mathbf{A}$ mátrixot, *(a)* írjuk fel sajátfelbontását, *(b)* spektrálfelbontását (a vetítőmátrixok különböző sajátértékekkel vett lineáris kombinációjaként), és (ezekből) *(c)* a redukált szinguláris felbontását! Végül *(d)* bontsuk fel az $(1, 1, 1)$ vektort a sajátalterekbe eső vektorok összegére! *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Írjuk fel annak a 11×11-es mátrixnak a Jordan-féle normálalakját, melynek egyetlen sajátértéke λ, és amelyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ rangja $k = 1, 2, 3, 4$ esetén rendre 7, 4, 1, 0. *(2 pont)*

4. Melyek irreducibilisek és melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix pszeudoinverzét! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Normális-e az $\mathbf{A}$ mátrix, és mennyi az 1- és a 2-normája, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$ valós, sőt $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ vektorra! *(4 pont)*

7. Igazoljuk, hogy ha λ a valós $\mathbf{A}$ mátrix egyszeres algebrai multiplicitású valós sajátértéke, és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó jobb, $\mathbf{y}$ egy bal sajátvektor, akkor a

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}}{\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{x}}$$

mátrix az $\mathbf{A}$ mátrix λ-hoz tartozó sajátalterére vetít az $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ tér mentén. (Útmutatás: mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}$ vetítő mátrix, hogy minden vektort $\mathbf{x}$ skalárszorosába visz, és hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ vektorait a 0-vektorba) *(5 pont)*