A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

A speciális relativitáselmélet olyan vonatkoztatási rendszerekkel foglalkozik, melyek egymáshoz képest egyenes-vonalú állandó sebességű mozgást végeznek.

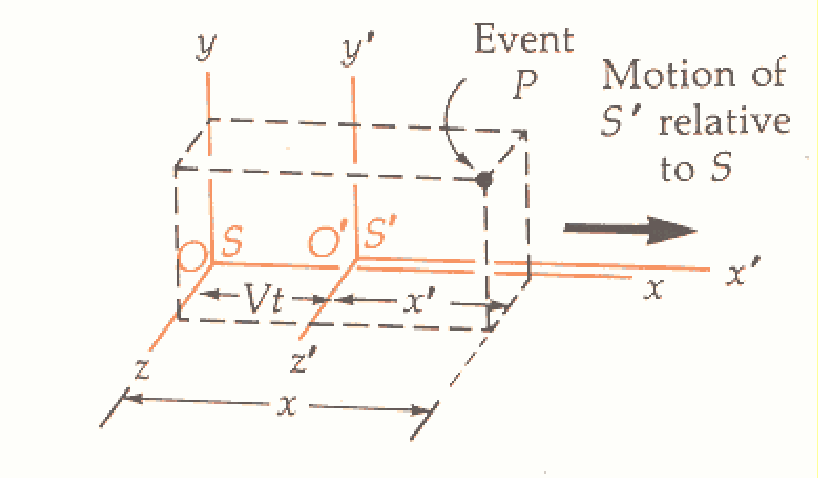
Alapkérdés:

Ha egy jelenséget két különböző, egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó inerciarendszerben vizsgálunk, hogyan kell a két rendszerben végzett mérések eredményeit összehasonlítani (átszámítani).

Hol és *mikor* történik valami? *Térben* és *időben.*

Pontszerű esemény *(x,y,z,t)* S vonatkoztatási rendszerben

- S' az S-hez képest *V* sebességgel mozog a közös +*x,* +*x'* tengely metén
- *t* = 0 időpontban a két vonatkoztatási rendszer origója egybeesik

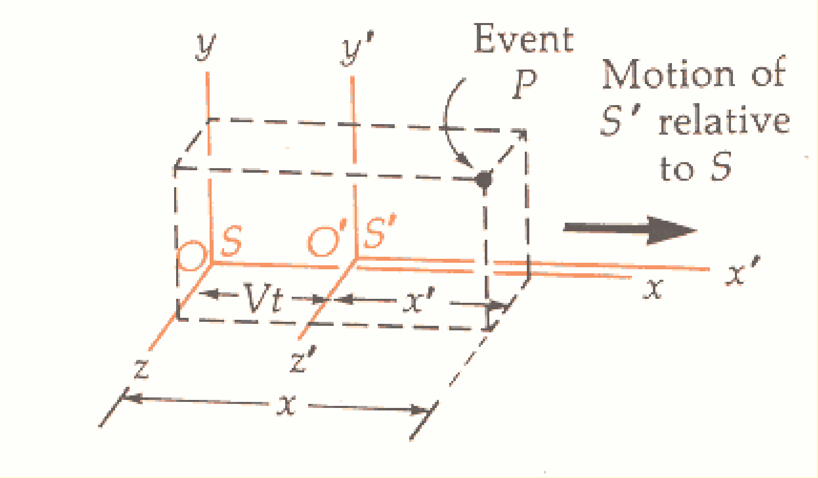


Vonatkoztatási rendszerre méterrudak hálózatát fektetjük, minden pontban egy megfigyelő van. Minden megfigyelőnek a rendszer többi órájával szinkronizált órája van,

Minden eseményt annak a lokális megfigyelőnek kell észlelnie, aki ott helyezkedik el, ahol az esemény végbemegy.

Az *események térben és időben történnek,* nem pedig egyik, vagy másik vonatkoztatási rendszerben. *Bármely* vonatkoztatási rendszer felhasználható arra, hogy – a kérdéses rendszerre vonatkoztatva – meghatározzuk az esemény négy adatát.

A Galilei transzformáció



A Galilei-féle relativitási elv:

a newtoni mechanika törvényei minden inerciarendszerben azonos alakúak.

esemény S'-ben (x',y',z',t') S-ben (x,y,z,t)

A GALILEI - TRANSZFORMÁCIÓ

$$x = x' + Vt' \qquad x' = x - Vt$$

$$y = y' \qquad y' = y$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

abszolút idő

$$t = t' \qquad t' = t$$

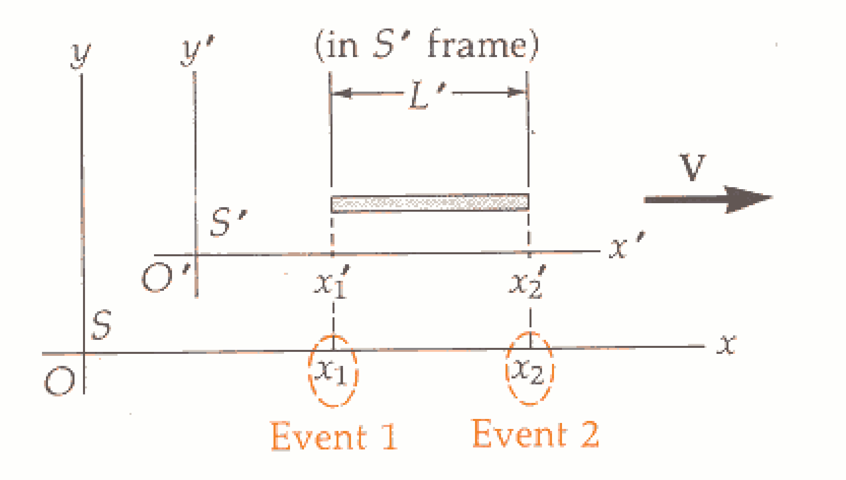
A mozgási hosszúság meghatározása

A rúd S’-ben (x’ tengely mentén) nyugszik. A nyugalmi hosszúság:

$$L' = x_2' - x_1'$$

1. esemény: a rúd vége egybeesik x_1 -el

2. esemény: a rúd eleje egybeesik x_2 -vel



A két esemény egyidejű S-ben. Galilei – tr.

$$L' = x_2' - x_1' = x_2 - Vt_2 - x_1 + Vt_1$$

$$t_1 = t_2$$

$$L' = x_2 - x_1 = L$$

FIGURE 41-2
In the S frame, the two events that determine the location of the ends of the moving stick at x_1 and x_2 are *simultaneous* events.

A nyugalmi hosszúság megegyezik a mozgási hosszúsággal.

A Galilei-féle sebesség-összeadás

$$dx = dx' + Vdt' \qquad dt = dt'$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt'} = u' + V$$

u a sebesség S-ben *u'* a sebesség S'-ben

A GALILEI-FÉLE SEBESSÉG-ÖSSZEADÁS (*x* - tengely menti sebességekre)

$$u = u' + V$$

A gyorsulások

S-ben $a = \frac{du}{dt}$ S'-ben $a' = \frac{du'}{dt'}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt'} + \frac{dV}{dt'}$$

V állandó $\frac{dV}{dt'} = 0$

$$a = a'$$

$$\sum F = \sum F' \qquad m = m'$$

$$\sum F = ma \qquad \sum F' = ma'$$

A (klasszikus) mechanika törvényei minden inercia-rendszerben érvényesek és ugyanolyan alakúak.

A (klasszikus) mechanika törvényei *invariánsak* a Galilei - transzformációval szemben.

Mechanikai kísérlettel nem lehet különbséget tenni inercia-rendszerek között.

A Maxwell - egyenletekből meghatározott sebesség adódott a fényhullámok terjedési sebességére:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A Maxwell - egyenletek nem invariánsak a Galilei transzformációval szemben.

A Maxwell - egyenletek a Lorentz transzformációval szemben invariánsak.
1890 H. A. Lorentz

A speciális relativitáselmélet alapposztulátumai

A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET ALAPPOSZTULÁTUMAI

(1) A fizika minden törvényének ugyanaz a matematikai alakja minden inerciarendszerben. (A relativitás elve)

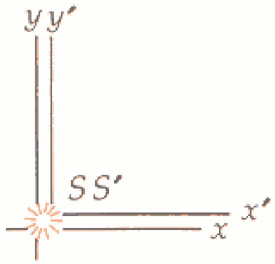
(2) A vákuumbeli fénysebesség értéke ugyanaz minden inerciarendszerben. (A fénysebesség állandóságának elve)

A táguló fénygömb paradoxona

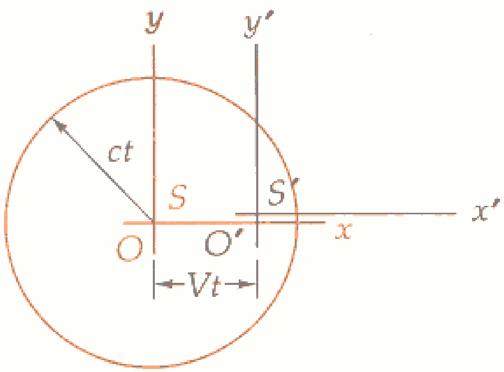
Bár minkét megfigyelő ugyanazt a táguló hullámfrontot észleli, mindketten úgy találják, hogy az saját rendszerük origójából, mint középpontból indul ki.

$$r^2 - (ct)^2 = r'^2 - (ct')^2$$

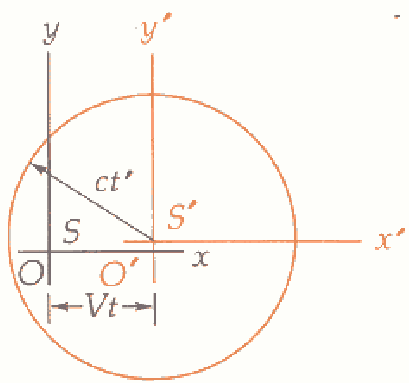
invariáns



(a) At $t = t' = 0$, a flashbulb is set off at the coincident origins O and O'.



(b) In the S frame at a later time t, the expanding spherical wavefront is centered on the origin O. The S' frame has moved in the $+x$ direction a distance Vt.



(c) In the S' frame at a later time t', the expanding spherical wavefront is centered on the origin O'. The S frame has moved in the $-x$ direction a distance Vt'.

FIGURE 41-3
The so-called "paradox" of the expanding light sphere. Observers in *each* frame of reference, measuring the *same* expanding wavefront, find that it is a sphere centered on their own origin. This is not a paradox in the context of the new space and time of special relativity.

Az órák szinkronizálása

A fénysebesség állandóságának felhasználásával történik:

$$t = \frac{r}{c}$$

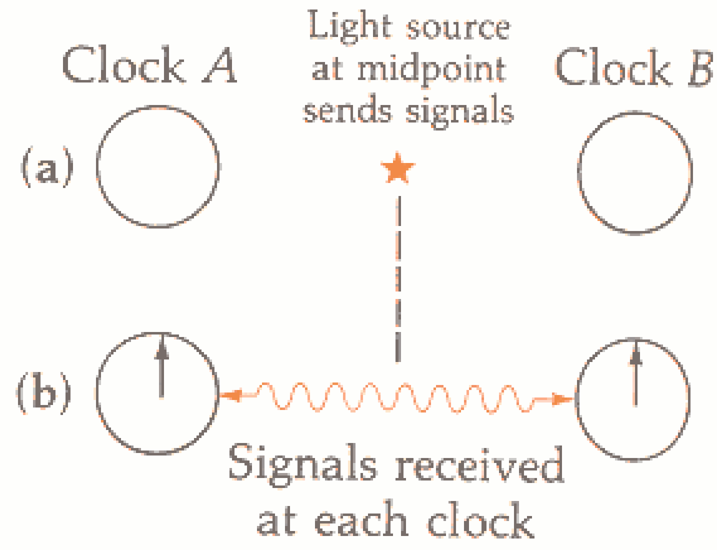


FIGURE 41-4
One method of synchronizing two clocks that are separated in space. A flashbulb at the midpoint sends light signals to each clock. If the clocks are set to read the same times when the signals arrive at each clock, they are correctly synchronized.

A Lorentz - transzformáció

A LORENTZ - TRANSZFORMÁCIÓ

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{V}{c} \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y' \qquad\qquad y' = y$$

$$z = z' \qquad\qquad z' = z$$

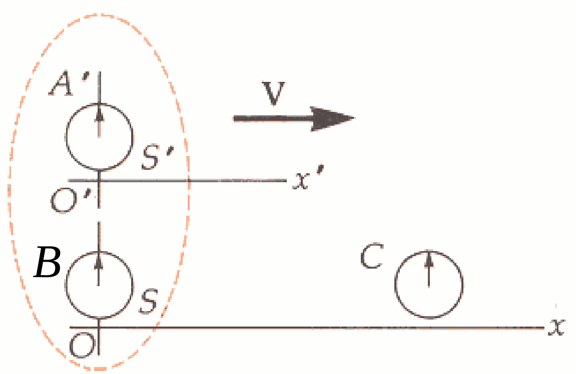
$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad\qquad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

V << *c* esetén átmegy a Galilei transzformációba

A Lorentz - transzformáció következményei.
Az időtartamok relativitása

A' óra S'-ben nyugalomban van

B és *C* órák S-ben nyugalomban vannak



(a) *The first event.* The moving clock *A'* is coincident with the stationary clock *B* in the *S* frame. (For convenience, we set all clocks to read zero at this instant.)

	Az órák mellett álló megfigyelők által leolvasott időpont	Az első esemény koordinátái
S'-ben	t_1'	(x_1', y_1', z_1', t_1')
S-ben	t_1	(x_1, y_1, z_1, t_1)

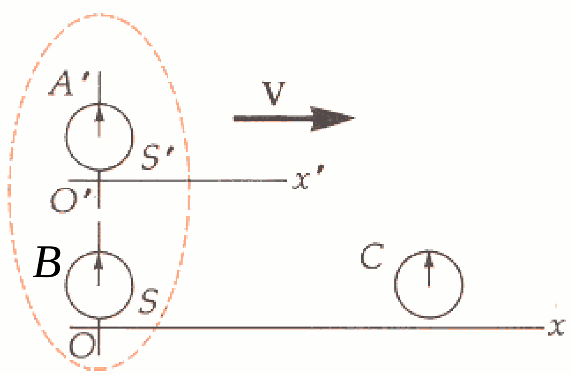
A Lorentz - transzformáció következményei.
Az időtartamok relativitása

Az első esemény:

az *A'* mozgó óra a *B* nyugvó órával esik egybe

A' óra S'-ben nyugalomban van

B és *C* órák S-ben nyugalomban vannak

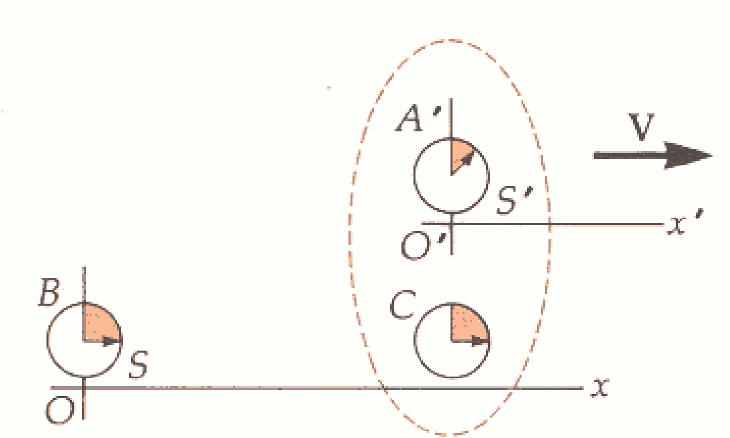


(a) *The first event.* The moving clock *A'* is coincident with the stationary clock *B* in the *S* frame. (For convenience, we set all clocks to read zero at this instant.)

	Az órák mellett álló megfigyelők által leolvasott időpont	Az első esemény koordinátái
S'-ben	t_1'	(x_1', y_1', z_1', t_1')
S-ben	t_1	(x_1, y_1, z_1, t_1)

A második esemény:

az *A'* mozgó óra a *C* nyugvó órával esik egybe



(b) *The second event.* The moving clock *A'* is coincident with the stationary clock *C* in the *S* frame.

A második esemény koordinátái

S'-ben (x_2', y_2', z_2', t_2')

S-ben (x_2, y_2, z_2, t_2)

A két esemény közötti időintervallum

S'-ben $T' = t_2' - t_1'$

S-ben $T = t_2 - t_1$

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\left(t_2' + \frac{Vx_2'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\left(t_1' + \frac{Vx_1'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S’-ben a két esemény ugyanazon a helyen megy végbe: $x_2' = x_1'$

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A $T' = t_2' - t_1'$ időintervallumot S’-ben *egyetlen* (ugyanaz az) óra mérte,

a *T* időintervallumot S-ben *két különböző* helyen lévő óra mérte.

Az *egyetlen* órán leolvasott időintervallumot zérus indexel jelöljük T_0

IDŐ - DILATÁCIÓ

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

T_0 egyetlen órán leolvasott időintervallum

A mozgási T időintervallum mindig hosszabb, mint a T_0 nyugalmi időintervallum.

A mozgó órák lassabban járnak, mint a nyugvó órák.

A jelenség *teljesen szimmetrikus*, Az S' megfigyelői a fenti eljárással úgy találják, hogy az S rendszer órái járnak lassabban, mint az S' rendszeré.

Az egyes vonatkoztatási rendszerek megfigyelői úgy találják, hogy a hozzájuk képest „mozgó" órák lassabban járnak, mint az ő nyugvó óráik.

Maga az idő viselkedik másképp, amikor a mozgó vonatkoztatási rendszer „időskáláját" egy stacionárius vonatkoztatási rendszerével hasonlítjuk össze.

Egy vonatkoztatási rendszer minden órája az ott helyes időpontot, a rendszeridőt mutatja.

A sajátidő (intervallum):

két esemény közötti időtartam mérésének eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, melyben a két esemény azonos helyen ment végbe.
A sajátidő (tartam) mérése mindig egyetlen órával történik.
Minden óra a saját helyén a sajátidőt méri.

A Lorentz - transzformáció következményei: A hosszúság relativitása

A mozgási hossz (mozgás irányával párhuzamos hosszúság) mérése

A méterrúd az S' vonatkoztatási rendszerben nyugalomban van, az *x'* tengely mentén helyezkedik el, hossza *L'*.

$$L' = x'_2 - x'_1$$

Az S vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelők fele (minden második) akkor állítja meg óráját, amikor helye (x_2 koordináta) a rúd elejével esik egybe, a másik fele (minden második), amikor a helye (x_1 koordináta) a rúd végével esik egybe.

Mozgási hossz: azon két megfigyelő távolsága, akinek az órája (egyiké a rúd elején, másiké a rúd végén) ugyanazt az időt mutatja. ($t_1=t_2$)

A nyugalmi hosszúság

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_1 = t_2$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A mozgási hossz $\quad L = x_2 - x_1$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$L' \equiv L_0$$

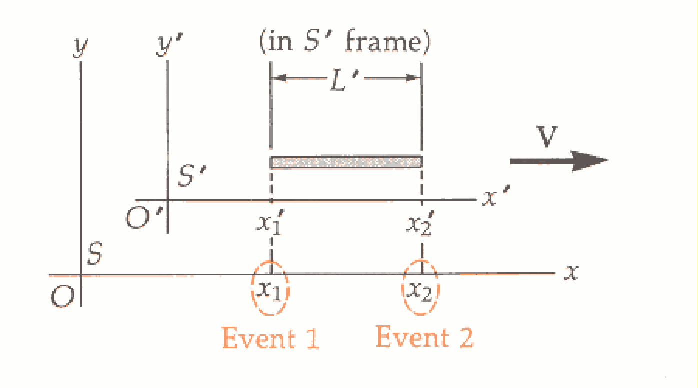


FIGURE 41-7
In the S frame, the two events that determine the location of the ends of the moving stick at x_1 and x_2 are *simultaneous* events.

HOSSZ KONTRAKCIÓ $$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$ (Az L_0-t abban a rendszerben kell meghatározni, melyben a rúd nyugalomban van)

A *mozgó* testek hossza a *mozgás irányában kisebb*, mint a nyugvó testek hossza.

A mozgás irányára *merőleges* távolságok a mozgó rendszerből mérve is *változatlan*ok maradnak.

A jelenség *teljesen szimmetrikus:*

Minden rendszer megfigyelői rövidebbnek mérik a másik – hozzájuk képest mozgó – rendszer méterrúdjait.

Nyugalmi hossz (sajáthossz): a hosszmeghatározás eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, melyben a tárgy nyugalomban van.

A relativisztikus sebesség-összeadás

(*x* irányú sebességekre)

A Lorentz – transzformáció infinitezimális elmozdulásra és infinitezimális időtartamra

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad dt = \frac{dt' + V dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

x irányú sebesség S-ben $$u_x = \frac{dx}{dt}$$

x’ irányú sebesség S’-ben $$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + Vdx'/c^2} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + V}{1 + \dfrac{dx'}{dt'}V/c^2} = \frac{u'_{x'} + V}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}}$$

RELATIVISZTIKUS SEBESSÉGÖSSZEADÁS (*x*-irányú sebességekre)

$$u_x = \frac{u'_{x'} + V}{1 + \dfrac{u'_{x'} V}{c^2}} \qquad u'_{x'} = \frac{u_x - V}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}}$$

Ha bármelyik sebesség –*x* (ill. –*x*') irányba mutat, akkor a megfelelő számértékek előtt negatív előjelet használunk.

A *c*-nél kisebb sebességek esetére a kifejezés a klasszikus Galilei-féle sebesség-összeadásra redukálódik:

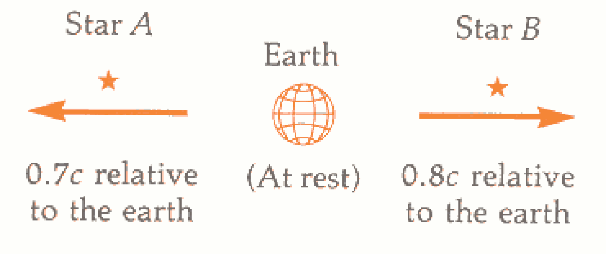
$$u_x = u'_{x'} + V \qquad u'_{x'} = u_x - V$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\dfrac{dt' + Vdx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\dfrac{dy'}{dt'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{dx'}{dt'}V/c^2} = \frac{u'_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}} \qquad u'_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}}$$

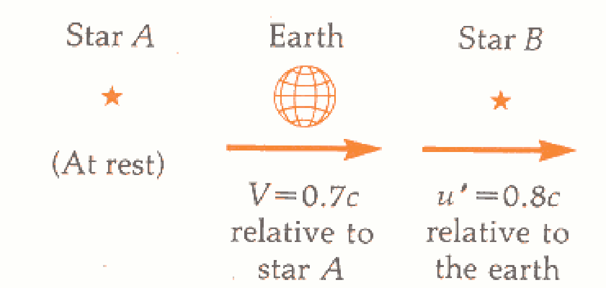
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\dfrac{dt' + Vdx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\dfrac{dz'}{dt'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{dx'}{dt'}V/c^2} = \frac{u'_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{u'_x V}{c^2}} \qquad u'_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{u_x V}{c^2}}$$

Példa

Az A és B csillag egymással ellentétes irányban távolodik a Földtől az ábrán látható elrendezésben és sebességgel. Adjuk meg a B csillag sebességét az A csillagon lévő megfigyelők szempontjából!



(a) As seen in the earth's frame of reference (the S' frame)



(b) As seen in star A's frame of reference (the S frame)

- az A csillag a nyugvó (S) rendszer
- a Föld (az S' rendszer) a mozgó (V=0.7c), a mozgó rendszerben a B csillag sebessége u' = 0.8 c

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} = \frac{(0.8c + 0.7c)}{1 + \frac{(0.8c)(0.7c)}{c^2}} = 0.962c$$

Példa

A Föld (S rendszer) mellett egy űrhajó (S' rendszer) V = 0.9999c sebességgel halad el. Az űrhajó utasa az űrhajó végén bekapcsol egy villanólámpát és c sebességű jelet küld az űrhajó orra felé. Mennyi a fényimpulzus sebessége a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben?

$$u' = c \qquad\qquad V = 0.9999c$$

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} = \frac{(c+V)}{1 + \frac{cV}{c^2}} = \frac{(c+V)c}{(c+V)} = c$$

A Lorentz - transzformáció következményei: Az egyidejűség relativitása.

S' ben két egyidejű esemény E_1' és E_2'

$$E_1' \quad (x_1', t_1')$$
$$E_2' \quad (x_2', t_2')$$
$$t_1' = t_2' = t'$$

Az S vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelő

az 1. eseményt x_1 helyen, t_1 időpontban,
a 2. eseményt x_2 helyen, t_2 időpontban észleli

$$E_1 \quad (x_1, t_1)$$
$$E_2 \quad (x_2, t_2)$$

$$t_1' = \frac{t_1 - Vx_1 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - Vx_2 / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)\frac{V}{c^2} = 0$$

$$t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)\frac{V}{c^2} = 0 \qquad x_2 = \frac{x_2' + Vt_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_1 = \frac{x_1' + Vt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

S-ben a két esemény nem egyidejű, kivéve, ha S'-ben ugyanazon a helyen történtek

Általánosságban

S-ben két esemény E_1 és E_2

$$E_1 \quad (x_1, t_1) \qquad E_2 \quad (x_2, t_2)$$

S' ben két esemény E_1' és E_2'

$$E_1' \quad (x_1', t_1') \qquad E_2' \quad (x_2', t_2')$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' \geq\leq t_2 - t_1$$

Az ok és okozat sorrendje

Ok: S-ben az E_1 esemény: az x_1 helyen, t_1 időpontban egy hatást indul, mely u sebességgel terjed

Okozat: S-ben az x_2 helyen, t_2 időpontban az E_1 által kiváltott E_2 esemény

S-ben $$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{u}$$

Van-e olyan S', melyben $t'_2 - t'_1 < 0$?

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{\dfrac{x_2 - x_1}{u} - (x_2 - x_1)\dfrac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x_2 - x_1)\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{V}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$t_2' - t_1' < 0$, ha $\quad \dfrac{1}{u} < \dfrac{V}{c^2} \quad \dfrac{c^2}{V} < u$ azaz $\quad c < u$

Ez pedig nem lehetséges, mert a jel *u* terjedési sebessége nem lehet nagyobb, mint *c*, a vákuumbeli fénysebesség.

Tehát nem létezik olyan vonatkoztatási rendszer, melyben az ok és okozat sorrendje felcserélődik. Az okság elve nem sérül.

A relativisztikus impulzus

A fizika törvényeinek invariánsnak kell lenniük a Lorentz-transzformációval szemben. Ezért általánosítanunk kell a Newton törvényeket, az impulzust és az energiát, hogy megfeleljenek a Lorentz transzformációs összefüggéseknek és a relativitás elvének.

Az impulzus megmaradás törvénye szerint két részecske üközésekor a magában álló rendszer eredő impulzusa változatlan.

Tegyük fel, hogy pl. az S vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelő mérése szerint az *impulzus megmarad*.

S-hez képest ***v*** sebességgel mozgó S' vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelő is méri az impulzusokat. A Lorentz transzformációs összefüggéseket és az impulzus klasszikus

$$\vec{p} = m\vec{u}$$

definícióját felhasználva az S'-ben lévő megfigyelő úgy találja, hogy S'-ben az impulzus *nem marad meg*.

Az ellentmondás feloldása céljából módosítani kell az impulzus definícióját, az alábbi feltételek figyelembevételével

• magában álló rendszerben az impulzusnak az ütközés során meg kell maradnia

• az impulzus relativisztikus kifejezésének $u \to 0$ esetén meg kell egyeznie az impulzus klasszikus értékével

A impulzus fenti feltételeket kielégítő relativisztikus kifejezése:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

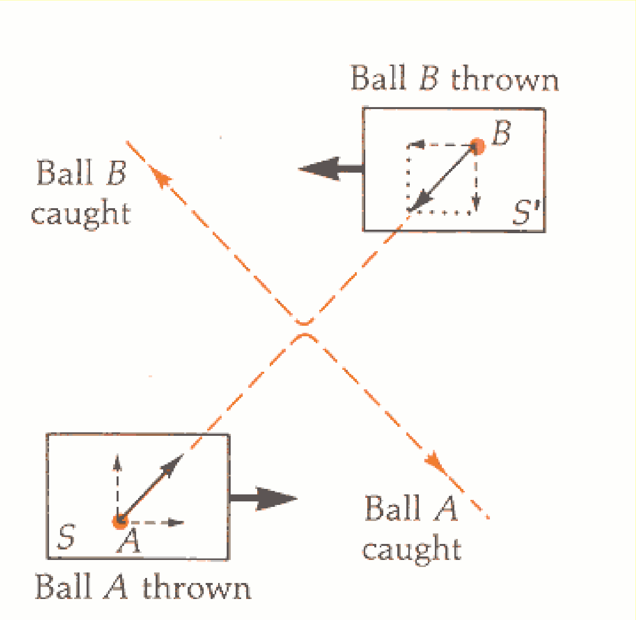
ahol *u* a részecske sebessége, *m* a részecske tömege.

Gondolatkísérlet:

vizsgáljuk meg két egyforma részecske rugalmas ütközését különböző vonatkoztatási rendszerekből.

A relativitás elve szerint az impulzus-megmaradás elvének minden inerciarendszerben fenn kell állnia.

Két vasúti kocsi, (az S ill. S' vonatkoztatási rendszer) egymással párhuzamos vágányokon azonos nagyságú, ellenkező irányú sebességgel közeledik egymáshoz a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben S".



Két egyforma részecske rugalmas ütközése az S" (Földhöz rögzített) vonatkozási rendszerben

Két egyforma részecske rugalmas ütközése

a) az S” (Földhöz rögzített) vonatkozási rendszerben

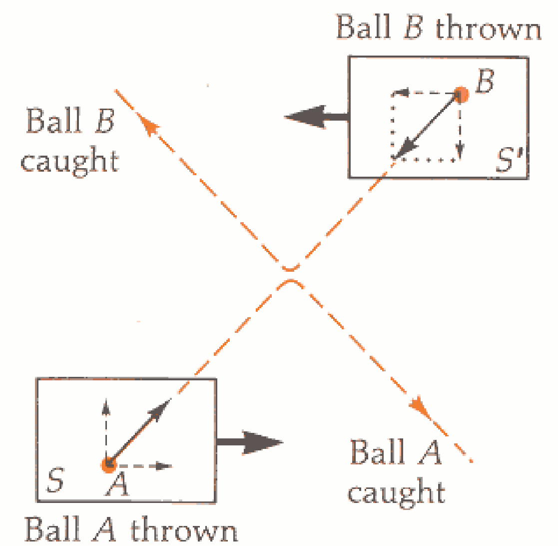
• mindkét rendszerben (S és S’) a két megfigyelőnek azonos, *m* tömegű labdája van

• mindkét megfigyelő a saját vonatkoztatási rendszerében a vagonok mozgás-irányára merőlegesen dobja el a labdát egyenlő nagyságú *u* sebességgel

• a labdák a vagonok mozgási irányára merőlegesen ugyanazt az *y* távolságot teszik meg és összeütköznek

• visszapattanva újra megteszik az *y* távolságot, a megfigyelők a labdákat elkapják

• a rugalmas ütközés teljesen szimmetrikus



(a) In the earth's frame, the elastic collision is completely symmetrical.

Jelölések

S-ben

• az A labda tömege *m*

• az *u* nagyságú merőleges sebességgel megtett összes távolság $y+y=2y$

S'-ben

• a B labda tömege *m*
• az *u* nagyságú merőleges sebességgel megtett összes távolság $y+y=2y$

Az *y* irányú távolságok nem szenvednek kontrakciót: $y = y'$

S'-ben B labda eldobása E_1 esemény

S'-ben B labda elkapása E_2 esemény

S'-ben E_1 és E_2

• azonos helyen történik

• a két esemény között eltelt időintervallum a T_0 saját-időintervallum

S-ben

• B labda eldobása és elkapása két különböző helyen történik

• az időtartamot két különböző órával mérjük

• az időtartam

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{V}{c}$$

• a B labda sebességének *y* komponense

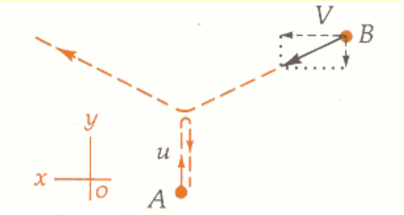
$$(u_B)_y = \frac{2y}{T} = \frac{2y\sqrt{1-\beta^2}}{T} = u\sqrt{1-\beta^2}$$

• az A labda eldobása és elkapása azonos helyen történik

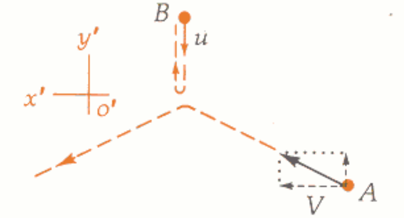
• a két esemény között eltelt idő a T_0 saját- időintervallum

• az A labda sebességének *y* komponense

$$(u_A)_y = \frac{2y}{T_0} = u$$



(b) The collision as measured in the S frame (observer A).



(c) The collision as measured in the S′ frame (observer B).

Az alsó ábra hibás!

S-ben

Az impulzusmegmaradás törvénye megköveteli, hogy

$$\left(\Delta p_A\right)_y = \left(\Delta p_B\right)_y$$

Ha az impulzust tömeg x sebesség alakjában definiáljuk, az impulzusváltozások nem lesznek egyenlőek!

$$\left(\Delta p_A\right)_y = -2mu \qquad \left(\Delta p_B\right)_y = 2mu\sqrt{1-\beta^2} \qquad \beta = \frac{V}{c}$$

A probléma azért merül fel, mert az impulzus *y* komponense függ a vonatkoztatási rendszer *x*- irányú sebességétől.

Módosítás:

Definiáljuk a *sebességet* a mozgó test $\Delta\tau$ *sajátidejével*, azzal az idővel, amit a testhez rögzített óra mér.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta \tau}$ így minden megfigyelő számára ugyanaz az érték lesz.

A $\Delta\tau$ sajátidőt a megfigyelő Δt idejével kifejezve

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

A példában a sebesség *y* komponense

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

A relativisztikus impulzus definíciója

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

A relativisztikus impulzus definíciója

RELATIVISZTIKUS IMPULZUS

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

- A definícióban nem szerepel a vonatkoztatási rendszerek egymáshoz képesti sebessége
- ehelyett a részecske adott vonatkoztatási rendszerbeli sebessége (*u*) szerepel
- ezzel a definícióval az impulzusmegmaradás tétele relativisztikus esetben is érvényes marad
- kis sebességek esetén a klasszikus alakra redukálódik

$$\vec{p} = m\vec{u} \qquad u << c$$

Négyesvektorok

A 4D téridőben egy esemény koordinátái

$$\{x_i\} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$$

S-ben S'-ben

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \leftarrow \text{Lorentz transzformáció} \rightarrow \quad (x_1', x_2', x_3', x_4')$$

A speciális Lorentz transzformáció mátrixa

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$

Négyesvektor: olyan négy komponensű mennyiség, melynek komponensei úgy transzformálódnak, mint az x_1, x_2, x_3, x_4 koordináták.

Két négyesvektor skaláris szorzata invariáns skalár.

A relativisztikus impulzus

A 4D téridőben az anyagi pont helyzetvektora

$$\{x_i\} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$$

x, y, z térszerű komponensek, *ict* időszerű komponens

Az anyagi pont pályája a 4D téridőben a *világvonal*.

Az S vonatkoztatási rendszerben az anyagi pont sebessége $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

Az *u* sebesség változhat → az anyagi ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszert (pillanatnyi, lokális inerciarendszert) használunk

A $\Delta\tau$ sajátidőtartam és az S-ben mért Δt időtartam kapcsolata

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

A sajátidőtartam (együttmozgó órával mért időtartam) invariáns skalár → a világvonal paraméterezése a τ sajátidővel történik

$$x_i = x_i(\tau)$$

A négyessebesség definíciója

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \qquad (i = 1,2,3,4)$$

$$u_1 \equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{u_x}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$u_2 \equiv \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{u_y}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$u_3 \equiv \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dt\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{u_z}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$u_4 \equiv \frac{d(ict)}{d\tau} = \frac{d(ict)}{dt\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{ic}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

A négyessebesség négyesvektor:

NÉGYESSEBESSÉG

$$\{u_i\} = \left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \right)$$

A négyessebesség önmagával vett skalárszorzata invariáns skalár

$$\sum_{i=1}^{4} u_i u_i = \frac{u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{-c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{1-\frac{u^2}{c^2}} = -c^2$$

A négyesimpulzus

m az anyagi pont tömege abban a vonatkoztatási rendszerben, melyben nyugalomban van (*u* = 0)

m invariáns skalár

$$p_i = mu_i \qquad (i = 1,2,3,4)$$

NÉGYESIMPULZUS

$$\{p_i\} = \left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \frac{imc}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \right)$$

$m\vec{u}$ a klasszikus (nem relativisztikus) impulzus

A ***relativisztikus impulzus***

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

A ***teljes energia***

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

A négyes-impulzus időszerű komponensébe a teljes energiát beírva

$$\{p_i\} = \left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, i\frac{E}{c} \right) = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c} \right)$$

a *teljes energia / fénysebesség*
a négyes-impulzus időszerű
komponense

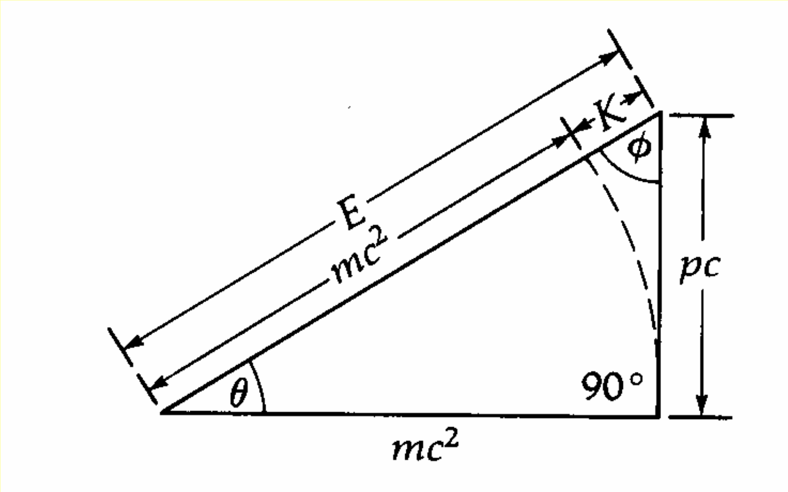
A négyes-impulzus önmagával vett skalárszorzata invariáns skalár

$$\sum_{i=1}^{4} p_i p_i = -m^2c^2$$

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2$$

$$(pc)^2 - E^2 = -m^2c^4 = -(mc^2)^2$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$



$$\sin\theta = \beta = \frac{u}{c}$$

$$\sin\phi = \sqrt{1-\beta^2}$$

$$E = mc^2 + K$$

K a kinetikus energia

Az *impulzusvektor* és az *energia* klasszikus megmaradási tétele egyetlen négyesvektor-mennyiség megmaradását kimondó tétellé olvad össze.

Ugyanakkor az *energia megmaradásának törvénye* magával vonja a *tömeg megmaradás* törvényét is az $E=mc^2$ összefüggés alapján.

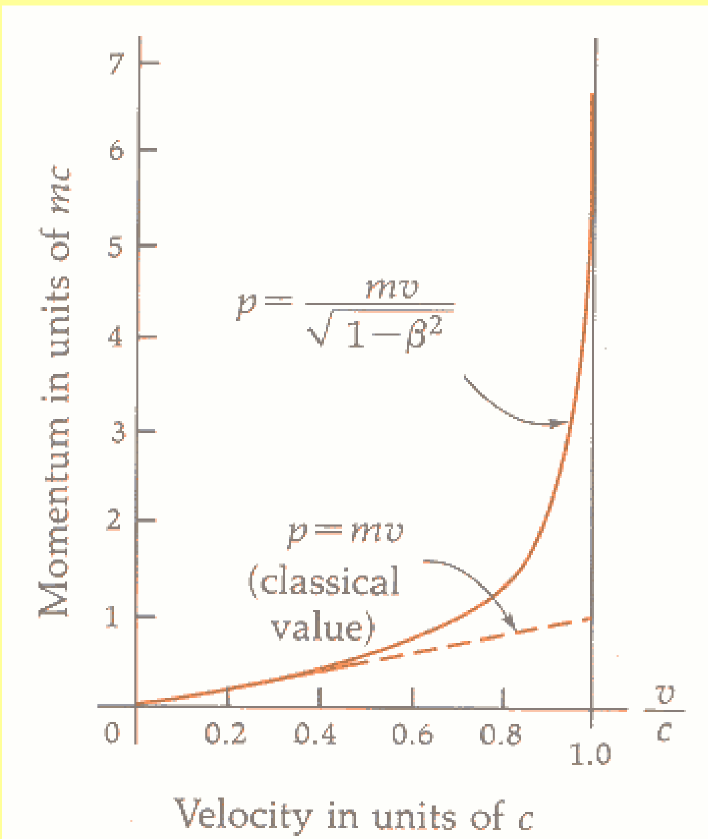


FIGURE 41-9
As the velocity increases, relativistic momentum deviates greatly from its classical value of *mv*. As the speed approaches *c*, the momentum approaches infinity.

A relativisztikus energia

Munkatétel 1D-ban

$$K_0 = 0 \qquad \Delta K = K - 0 = \int_0^x F dx$$

A *v* az anyagi pont sebessége, *K* a kinetikus energiája. Integrálási változónak tekintsük a *p* relativisztikus impulzust.

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad dx = vdt \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\left(\frac{p}{m}\right)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = v^2 \qquad v^2\left(1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right) = \left(\frac{p}{m}\right)^2 \qquad v = \frac{p/m}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}}$$

$$v = \frac{p/m}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}}$$

$$K = \int_0^t \frac{dp}{dt} v\,dt = \int_0^p v\,dp = \int_0^p \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} dp$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{1/2}} = \sqrt{a^2 + x^2} + c$$

$$K = \left[mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \right]_0^p = \left[mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \right] - mc^2$$

$$K = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right]$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$K = mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1\right] = mc^2\left[\sqrt{1+\frac{m^2v^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)m^2c^2}} - 1\right] = mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

A RELATIVISZTIKUS KINETIKUS ENERGIA

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

m a nyugalmi tömeg

Taylor - sorba fejtve

$$K = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2+\ldots-1\right]$$

$v << c$ esetén

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

A NYUGALMI ENERGIA

$$E_0 = mc^2$$

m a nyugalmi tömeg

Tömeg energia ekvivalanciája (egyenértékűsége): a tömeg és energia összetartozó mennyiségek.

A *nyugalmi* energia és a *kinetikus* (mozgási) energia összege a rendszer *teljes energiája*

A TELJES RELATIVISZTIKUS ENERGIA

$$E = mc^2 + K$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A tömeg-energia megmaradási törvénye egyesíti az energia-megmaradás és tömeg-megmaradás törvényét.

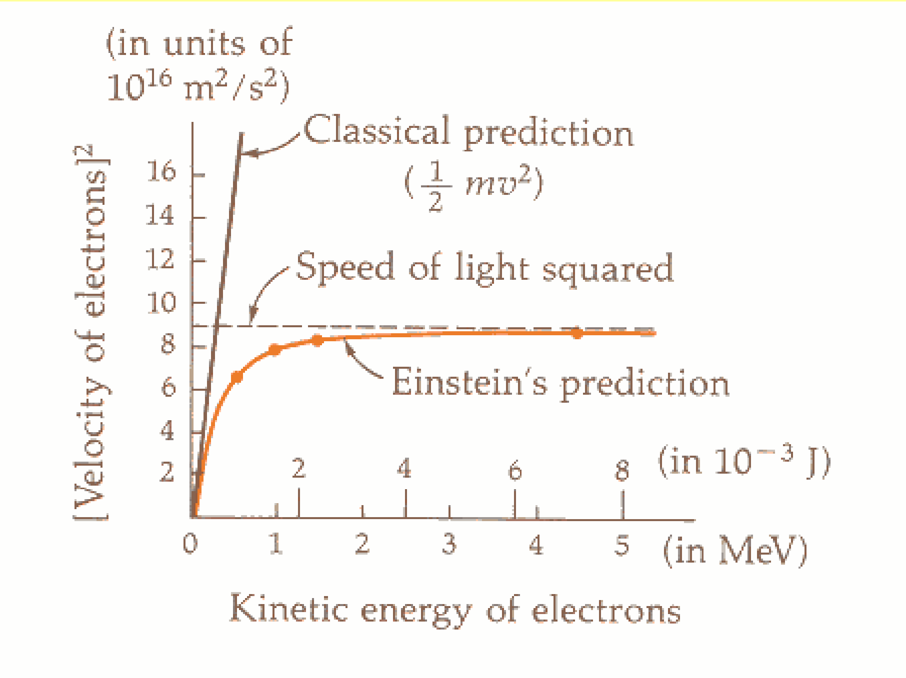


FIGURE 41-10
The experimental points show evidence for the speed of light as a limiting velocity for any particle that has mass. (Adapted from W. Bertoozi, *American Journal of Physics* **32** (1964), p. 555, with permission of the American Journal of Physics.)

FIGURE 14-11
The Stanford three-kilometer linear accelerator for electrons at the Stanford Linear Accelerator Center (SLAC). (An interstate highway passes over the accelerator.) The operation of the accelerator verifies all aspects of special relativity. Electrons emerging from the accelerator differ from the speed of light by only about 5 parts in 10^{11}. If classical (Galilean) relativity were correct and the relativistic momentum increase did not occur, the accelerator would need to be only a few inches long to achieve this speed.

TABLE 41-1 Mass-Energies of Some Common Particles (rounded 1986 CODATA values)

Particle	Symbol	mc^2 (in MeV)	m (kg)
Electron (or positron)	e or e^- (e^+)	0.511	$9.109\,390 \times 10^{-31}$
Muon	$\mu^{\pm}$	105.658	$1.883\,533 \times 10^{-28}$
Pi meson (neutral)	π^0	134.964	$2.405\,95 \times 10^{-28}$
Pi meson (charged)	$\pi^{\pm}$	139.569	$2.488\,05 \times 10^{-28}$
Atomic mass unit	u	931.494	$1.660\,540 \times 10^{-27}$
Proton	p	938.272	$1.672\,623 \times 10^{-27}$
Neutron	n	939.565	$1.674\,929 \times 10^{-27}$
Deuteron	d or ^2H	1875.613	$3.343\,586 \times 10^{-27}$
Alpha particle	α or ^4He	3727.380	$6.644\,653 \times 10^{-27}$

maghasadás

párkeltés

ÖSSZEFÜGGÉS A
RELATIVISZTIKUS ENERGIA
ÉS IMPULZUS KÖZÖTT

$$E^2 - (pc)^2 = -(mc^2)^2$$

E a teljes energia, *p* a relativisztikus impulzus, *m* a nyugalmi tömeg.

A négyes-impulzus

$$\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, i\frac{E}{c} \right) = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c} \right) \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Egy négyes-vektor önmagával vett skaláris szorzata invariáns skalár. A fenti a összefüggés a négyes-impulzus önmagával vett skaláris szorzata.

A foton nyugalmi tömege zérus, így a foton energiája és impulzusa közötti összefüggés:

$$E = pc$$

csak fotonra !

TOVÁBBI ÖSSZEFÜGGÉSEK A RELATIVISZTIKUS ENERGIA ÉS IMPULZUS KÖZÖTT

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mc^2K} = \sqrt{2mK\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)}$$

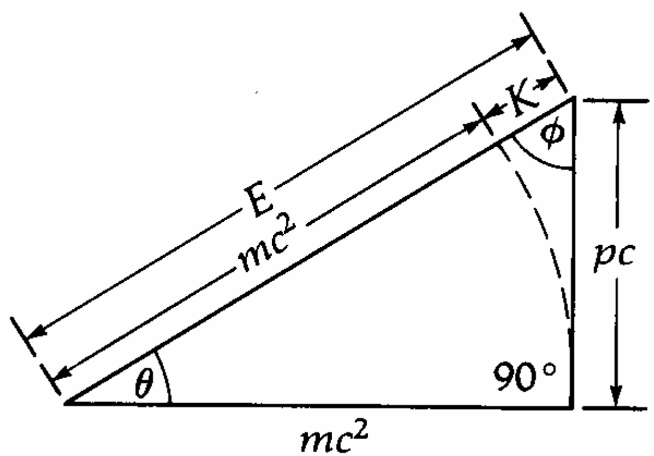


FIGURE 41-14
To help you remember relations between E, K, and p, this right triangle and the Pythagorean theorem illustrate that $E^2 = (pc)^2 + mc^2$. Also, note that $E = mc^2 + K$. It is also easy to show that $\sin\theta = \beta$ and $\sin\phi = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Hibás !

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{(pc)^2}{2mc^2} = K\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

Ha az *E* energia sokkal nagyobb, mint az mc^2 nyugalmi energia:

NAGY-ENERGIÁS KÖZELÍTÉS $\quad E \approx pc \quad$ ha $\quad pc << E$

A relativisztikus Doppler effektus

	Távolodó forrás	Közeledő forrás
RELATIVISZTIKUS DOPPLER EFFEKTUS EM - HULLÁMOKRA	$f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$	$f = f_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

A relativitáselmélet és az elektromágnesség

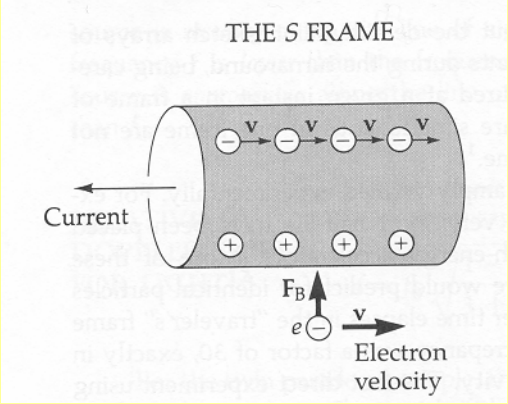
Az elektromos töltés invariáns skalár.

Példánkban az S vonatkoztatási rendszerben az *e* elektron árammal átjárt, nyugalomban lévő huzal mentén, azzal párhuzamosan ***v*** sebességgel mozog.

Az elektronra ható erő a vonatkoztatási rendszertől függően mágneses, elektromos, vagy mindkettő.

Az S vonatkoztatási rendszerben

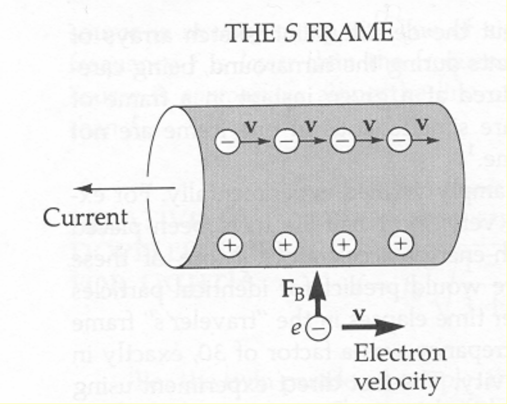
- a huzalban folyó áram mágneses mezőt hoz létre, az mozgó *e* elektronra a huzal felé mutató $\boldsymbol{F}_B$ *Lorentz* erő hat, az *e* elektron a huzal felé gyorsul
- a pozitív ionok nyugalomban vannak, a huzal elektronjai ***v*** sebességgel mozognak jobb felé



Az S vonatkoztatási rendszerben

• az elektronok a huzal mentén a Lorentz kontrakció miatt közelebb látszanak egymáshoz, mint a nyugalmi távolságuk

• ez a Lorentz kontrakciót szenvedett távolság éppen akkora, mint a pozitív ionok közötti távolság, mert a tapasztalat szerint a huzalnak *nincs eredő töltése*



Az S’ vonatkoztatási rendszerben

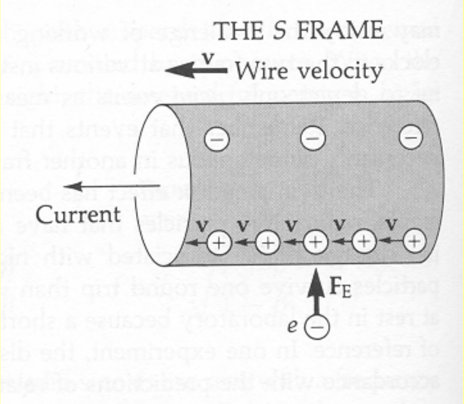
• az *e* elektron áll, a huzal mozog balra

• a huzalban az elektronok nyugalomban vannak, nagyobb távolságra látszanak egymástól, mint az S-ben

• a pozitív ionok balra mozognak, az elektronok állnak, a huzal áramot szállít

• az álló *e* elektronra az áram nem fejt ki Lorentz erőt

• a pozitív ionok a Lorentz kontrakció miatt közelebb látszanak egymáshoz

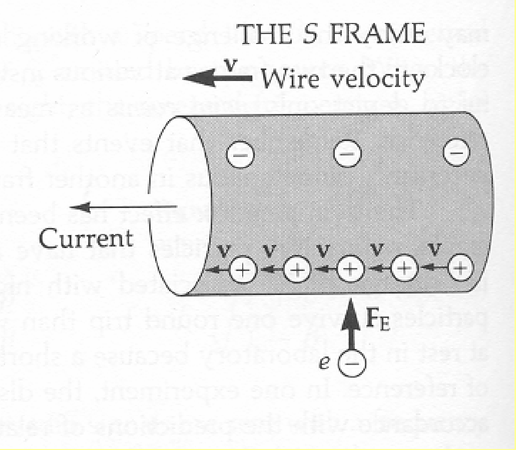


Az S’ vonatkoztatási rendszerben

• az S’ megfigyelő a *huzalnak pozitív töltést tulajdonít,* mert a nyugvó negatív töltések között a távolság nagyobb, mint a mozgó pozitív töltések közötti, Lorentz kontrakciót szenvedett távolság

• S’-ben az *e* elektronra kizárólag *elektrosztatikus erő* hat

• az S’-ben kapott elektromos erő pontosan ugyanakkora, mint amekkora az S-ben ható mágneses erő



Az ikerparadoxon

A Földön él egy ikerpár, Stella és Terra. Stella űrhajóval a Földtől 4 fényév távolságra utazik 0.8c sebességgel, megfordul visszatér a Földre. Az induláshoz, megforduláshoz és megálláshoz tartozó időintervallum elhanyagolhatóan rövid az utazáshoz képest.
Helyi idő szerint minden január 1-én rádiójeleket küldenek egymásnak, ezek c sebességűek.
Amikor Stella visszaér, 4 évvel *fiatalabb* a Földön maradt Terránál.

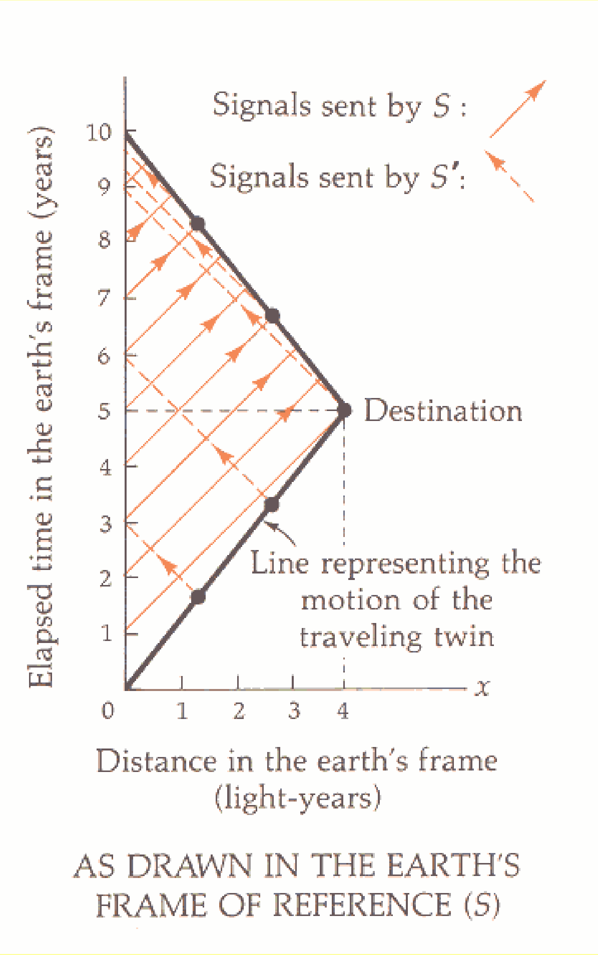
S (a Földhöz rögzített) vonatkoztatási rendszer

$$V = 0.8c$$

Távolság:

oda 4 fényév, vissza 4 fényév, összesen 8 fényév

Időtartam: 8 fényév / 0.8 c =10 év



Az utazás ábrázolása a Minkowski síkon

S’ (az űrhajóhoz rögzített) vonatkoztatási rendszer

A távolság (Lorentz kontrakciót szenved):

$$L' = L\sqrt{1-\beta^2} = 8\,\text{fényév}\sqrt{1-0.8^2} = 4.8\,\text{fényév}$$

Időtartam: 4.8 fényév / 0.8 c = 6 év

A jelenség ***nem szimmetrikus***! Stella űrhajója nem állandó sebességgel halad, az induláskor, megforduláskor, megálláskor gyorsul. A gyorsulás abszolút, nem relatív dolog. A gyorsulás nem változtatja meg az *órák járásának ütemét,* de megváltoztatja az *egyidejűség skáláját*.

Az utazás január elsején kezdődik, mindketten minden január elsején rádió jelet küldenek egymásnak. A rádiójelek *c* sebességgel terjednek, (helyi időskála szerinti) frekvenciájuk 1 impulzus / év.

A Minkowski síkon

• a vízszintes *x* tengelyen a távolságot fényévben,

• a függőleges tengelyen az időt években mérjük

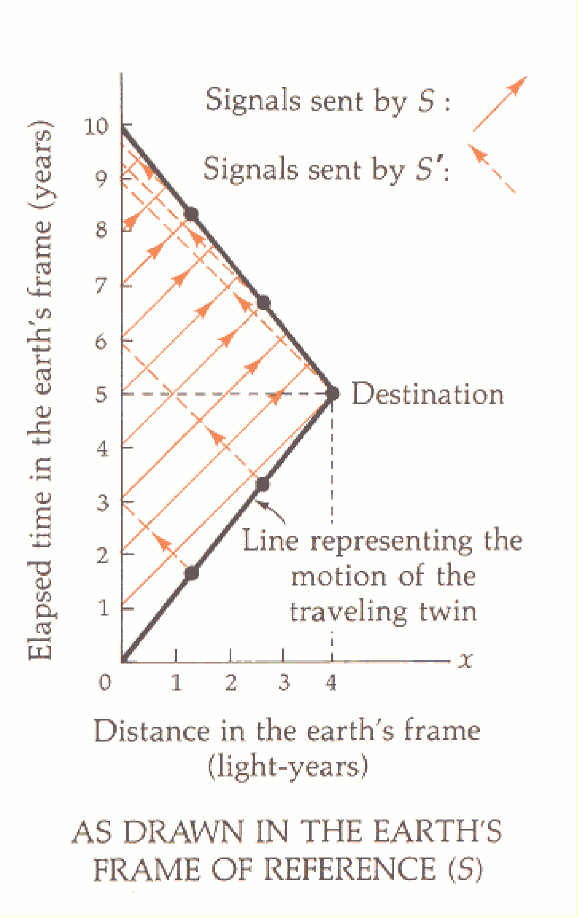
Fénykúp

• a +*x* irányban haladó fény világvonala 45°-os egyenes

• a -*x* irányban haladó fény világvonala -45°-os egyenes

•Terra világvonala a függőleges (idő) tengely

• Stella világvonala a 0.8*c* és -0.8*c* sebességek által meghatározott meredekségű két egyenes szakasz



Rádiójelek

Frekvencia: $f_0 = 1\,\text{impulzus/év}$ $\beta = \dfrac{V}{c} = 0.8$

A relativisztikus Doppler eltolódás miatt az észlelt frekvencia

távolodáskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}} = \frac{1}{3}f_0$$

közeledéskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1+0.8}{1-0.8}} = 3f_0$$

Az utazás időtartama alatt a Földön 10 év telik el. Terra a 10 év alatt 10 jelet bocsát ki.

S’ vonatkoztatási rendszerben számolva

Stella

• az utazás első felében 3 évente észlel jelet

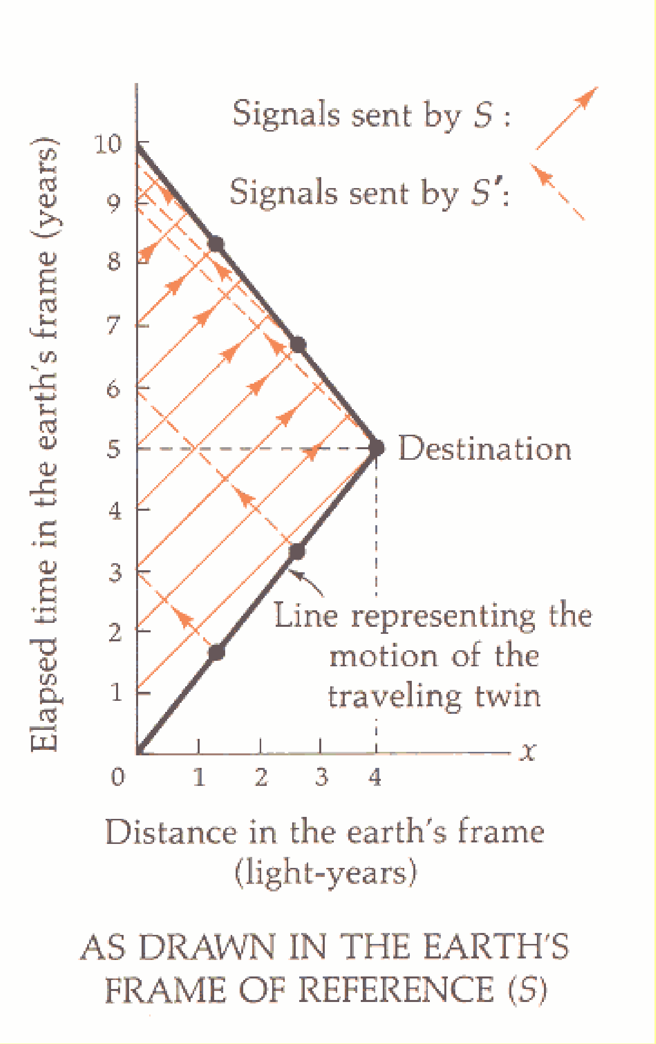
• az utazás második felében évente 3 jelet észlel

• a jelészlelés átlagos gyakorisága az egész utazás alatt:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(3)=\tfrac{5}{3}\ \text{évente}$$

• összesen 10 jel érkezett,így a teljes idő:

$$\frac{10}{\frac{5}{3}}=6\ \text{év}\,!$$



Stella úgy találja, hogy 6 év telt el az űrhajón (S’-ben).

S vonatkoztatási rendszerben számolva

Terra

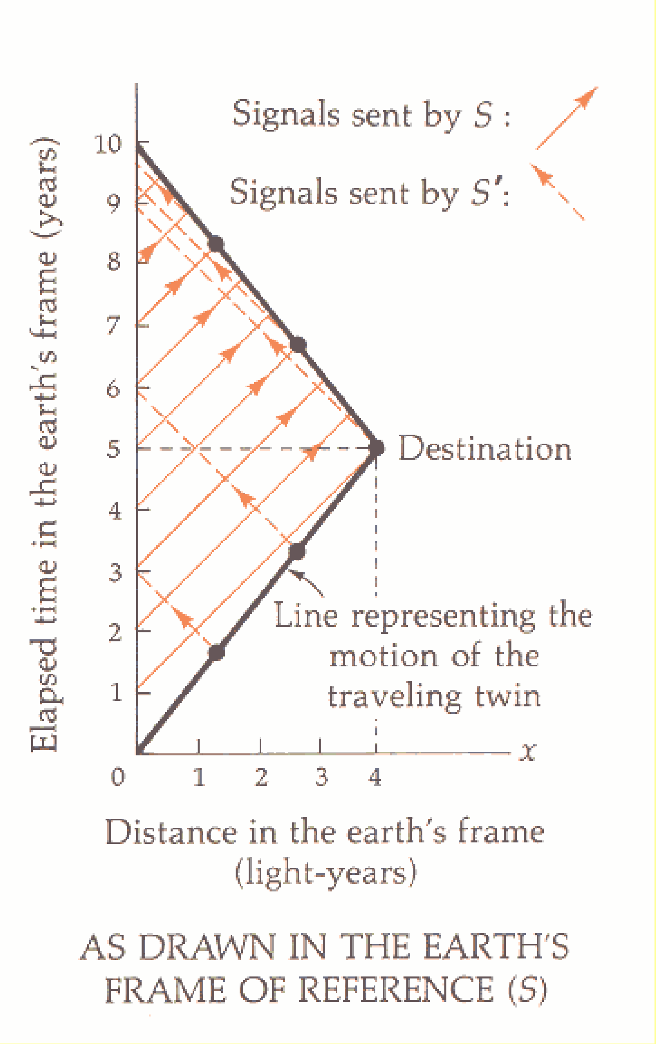
• az utazás első 9 évében 3 évente észlel jelet

• az utazás 10. évében évente 3 jelet észlel

• az észlelt jelek száma

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)(9)+(3)(1)=6$$

Terra úgy találja, hogy 6 év telt el az űrhajón (S'-ben) !



A gyorsuló test világvonala görbe. Állandó sebességű szakaszokkal (lokális inerciarendszerekkel) közelítjük. A sajátidőtartam

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{u(t)}{c}\right)^2}\, dt$$

Görbe világvonal „hossza” sajátidőben rövidebb, mint az egyenesé.

Stella gyorsul, sajátideje rövidebb Terráénál, ezért lesz fiatalabb Terránál.

Az S és S’ szimmetriája megszűnik.

A Terrel jelenség

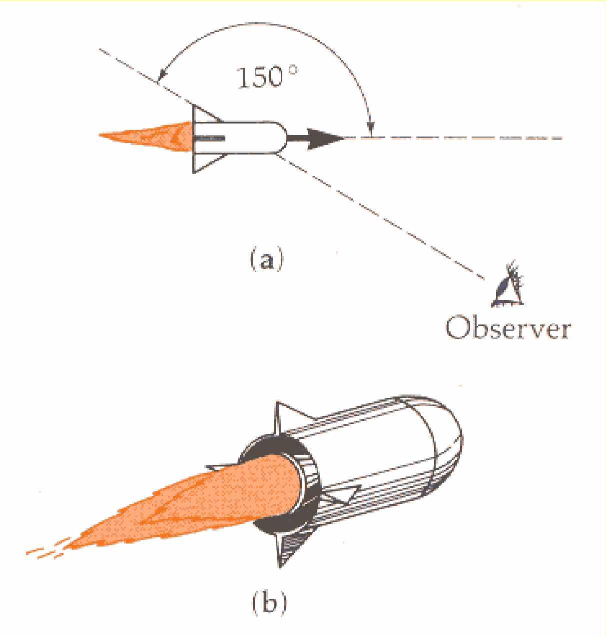


FIGURE 41-18
The Terrell effect. In 1959, James Terrell showed (surprisingly) that if a snapshot is taken of an object in rapid motion at a relatively large distance away, the object will appear to have undergone *rotation*, not contraction. As mentioned in the reference cited below, Terrell considers a relativistic rocketship approaching an observer with speed $v/c = 0.98974$, viewed in a direction at 150° from the flight direction, as sketched in (a). As shown in (b), a snapshot, or the *visual* appearance to the observer, will show the rocketship approaching almost tail-end first! This unusual effect results partly from the fact that, in a snapshot, the camera captures light that arrives simultaneously at the camera. Thus light from more distant parts of the object must have left earlier than the light from closer parts of the object because it had farther to travel. Other unexpected shear distortions occur if a finite solid angle of viewing is considered or if a pair of stereoscopic photos are obtained. This example emphasizes that the data acquired in an experiment depend crucially on the method of measurement employed. [See Letter to the Editor, "The Terrell Effect," James Terrell, *American Journal of Physics* **57**, 9 (Jan. 1989).]