III. előadás 2010. XI. 02.

Generátorfüggvények és alkalmazásait

A generátorfgv. az eloszlásfgv. egy ~~k~~ ált. leírását adja

Az eloszlást nem mindig lehet közvetlenül kiszámolni, azt az erőforrásigények.

↓

a generátorfgv. a teljes eloszlást megadja.

A (motiváló)

a szerverről ad információt

M/M/1 kiszolgálórendszer

Egymás után jönnek be csomagok, s a kiszolgálás ideje is véletlen

a beérkező folyamatot jellemzi

exp (λ)

↓

exp. eloszlású időközönként jönnek csomagok.

a kiszolgálást jellemzi (kiszolgálási idő vagy csomagméret)

↑

azaz exp. eloszlású μ paraméterrel

A kiszolgálások között eltelő idők.

szerver:

1 szerver van, az mutatja.

∞ nagy a puffer

Azt látjuk egy pillanatban, hogy ~~a~~ N csomag van a rendszerben (a bentlévő csomagok száma)

↓

N ~~a~~ egy ~~[illegible]~~ valószínű

~~a~~ Napon soká nézünk rá.

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ egymás után a beérkező csomagokhoz tartozó kiszolgálási idő.

↓

X_i: sorban az i-edik csomag kiszolgálási ideje.

Legyen Y: beérkezik egy csomag ~~és~~ akkor, amikor N igény van a rendszerben

Y = a kiszolgálásig eltelő idő.

Y eloszlása = ?

$F(t) = P(Y<t)$ az eloszlásfüggvény

A teljes valószínűség tételével ezt:

$$P(Y<t) = \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} P(Y<t \mid N=n)P(N=n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y<t \mid N=n) \cdot P(N=n) =$$

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Y tehát egy végtelen tagszámú összeg.

$$= P(Y<t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n < t)\, P(N=n)$$

ha N felvesz egy konkrét n-t, akkor véges tagszámú összeg lesz

↑

ennek a kiszámítása egy n-szeres integrál. A kiszámítás tehát NEHÉZ!

↓

másképp kell nézni

Def: Egy $a_0, a_1, \dots$ számsorozat generátorfüggvénye az $A(z)$ hatványsor: $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$

Áll: ~~Az~~ ~~$A(z)$~~

legyen $z_0 = \liminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

$A(z)$ konvergens, ha $|z| < z_0$

Ezt akarjuk általánosítani

↓

Nemnegatív értékű valószínűségi változók generátorfgv-e.

Def: Legyen X egy nemnegatív értékű valószínűségi változó (értékei $0, 1, 2, \dots$)

$p_0 = P(X=0)$

$p_1 = P(X=1)$

$\vdots$ $\quad p_2 = P(X=2)$

X generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = p_0 + p_1 \cancel{\xi} z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$$

Áll:

(1) a, $G_X(1) = 1$

b, $\liminf \dfrac{1}{\sqrt[n]{p_n}} \geq 1 \Rightarrow G_X(z)$ konvergens, ha $-1 < z < 1$

c, A generátorfüggvény meghatározza az eloszlást.

Ezt úgy temi, hogy

k-adik derivált $\rightarrow$ $G_X^{(k)}(0)$ $\leftarrow$ a 0 helyen vett k-adik derivált.

$$\frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = P(X=k) = p_k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Biz:

a, ~~$G(x)$ $G_1(x)$.~~

$G_X(1) = p_0 + p_1 + \ldots = 1$ ~~eloszlás, így~~

mivel X valószínűségi változó

$P(X=0) + P(X=1) + \ldots$ $\leftarrow$ teljes eseményrendszer.

c,

$G_X(0) = p_0$

$G_X'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + \ldots$

$G_X'(0) = p_1$

$G_X''(z) = 2p_2 + 3p_3 z + \ldots$

$G_X''(0) = 2p_2 \Rightarrow \dfrac{G_X''(0)}{2!} = p_2$

$\vdots$ stb.

Példa:

Legyen X Poisson-eloszlású $\lambda = 5$ paraméterrel.

Ilyenkor $p_k = P(X=k) = \dfrac{5^k}{k!} \cdot e^{-5}$

$k = 0, 1, \ldots$

Ennek a generátorfüggvénye:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} \cdot e^{-5} \cdot z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(5z)^k}{k!} \cdot e^{-5} =$$

Mivel: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, ezért

$$= e^{5z} \cdot e^{-5} = e^{5(z-1)}$$

Vagyis ha $X \sim Poi(\lambda)$, akkor

$$\boxed{G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}}$$

Példa: Indikátorfgv.

$$I = \begin{cases} 1 & p \text{ valószínűséggel} \\ 0 & 1-p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

$G_I(z) = ?$

$p_0 = P(I=0) = 1-p$

$p_1 = P(I=1) = p$

Vagyis $G_I(z) = p_0 + p_1 z = 1-p+pz$

~~Áll.~~

Áll (2) a, $\boxed{G_X(z) = E(z^X)}$!

b, $G_X'(1) = E(X)$

$G_X''(1) = E(X^2) - E(X)$

Általában:

$G_X^{(n)}(1)$ kifejezhető az első n momentummal, ha a deriváltak léteznek.

$= a_1 E(X) + a_2 E(X^2) + \dots + a_n E(X^n)$, ha $E(X^n)$ létezik.

c) $D^2(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left[G_X'(1)\right]^2$

Biz:

a) ~~$E(z^X) =$~~

Általában: $E(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P(X=k)$

így $E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)$

Ez pont a definíció.

$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = G_X(z)$

b, $G_X'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + \dots$

$G_X'(1) = \underbrace{p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots}_{\text{az értéket túlnyomó a valószínűségekkel}} \overset{\text{def.}}{=} E(X)$

$$G_X''(z) = 2p_2 + 3\cdot 2\cdot p_3 z + \dots + k(k-1)p_k z^{k-2} + \dots$$

$$G_X''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k =$$

$$= E(X^2) - E(X)$$

Független valószínűségi változók összegének generátorfgv-e

Áll. (3) Ha X és Y függetlenek (nemnegatív egész értékűek), akkor az összeg generátorfgv-e = generátorfgv-ek szorzata:

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

Ennek a következménye:

$X_1, X_2, \dots X_n$ fgtlen-ek

$$\Downarrow$$

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(z) = G_{X_1}(z) \cdot G_{X_2}(z) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(z)$$

Biz:

$G_X(z) = E(z^X)$ -t használjuk.

$$G_{X+Y}(z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X \cdot z^Y) =$$

Mivel X és Y fgtlen, ezért $P(X=i, Y=j) =$

$= P(X=i) \cdot P(Y=j)$

$$= \sum_i \sum_j z^i \cdot z^j \cdot P(X=i) \cdot P(Y=j) = \sum_i z^i P(X=i) \cdot$$

$$\cdot \sum_j z^j \cdot P(Y=j) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

~~A lövet~~ Ezt így folytathatjuk.

Alkalmazás:

1, legyen $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$

$$G_X(z) = ?$$

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$I_i = \begin{cases} 1, \text{ ha az } i\text{-edik kísérlet sikeres} \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$$

$$G_{I_1}(z) = 1-p+pz$$

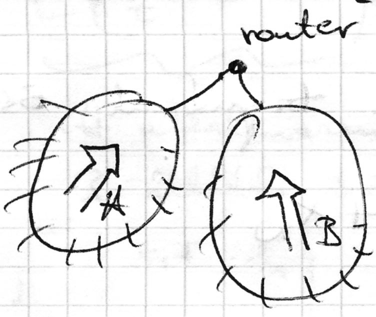
vagyis

$$G_X(z) = \cancel{G_{I_1} + G} \; G_{I_1+I_2+\dots+I_n}(z) \overset{\substack{3.\text{ áll}\\ \downarrow}}{=} G_{I_1}(z) \cdot \ldots G_{I_n}(z)$$

$$\underset{\uparrow}{=} (1-p+pz)^n$$

mert mindegyik ugyanolyan eloszlású

2, Van két hálózatrészünk



A részből 1s alatt érkező sessionok eloszlása Poi(λ), a B részből 1s alatt érkező sessionok eloszlása Poi(μ).

A két részből érkező forgalom fgtlen. egymástól:

X = A-ból érkező sessionok száma

Y = B-ből érkező sessionok száma

$X+Y=?$ (mekkora forgalom megy a router felé)

~~eloszlása~~

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)} \cdot e^{\mu(z-1)} =$$

$$= e^{(\lambda+\mu)(z-1)}$$

↑ ez egy Poisson-eloszlás generátorfgv-e.
Poi($\lambda+\mu$) generátorfüggvénye.

„Még Poissonabb lett."

<u>Véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye</u>

$X_1, X_2, \ldots$ fgtln azonos eloszlásúak
$0, 1, 2, \ldots$ értékűek.

Van egy N valószínűségi változó, ami fgtln $X_1, X_2, \ldots$-től és $1, 2, 3, \ldots$ értékű.

Ekkor Y (a véletlen tagszámú összeg)

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Áll. (4.)

$$G_Y(z) = G_N\left(G_{X_1}(z)\right)$$

$\Downarrow$

Ennek a következménye:

$$\left(f(g(z))\right)' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

EY-t is lehet számolni.

$$EY = G_Y'(1) = G_N'\big(\underbrace{G_{X_1}(1)}_{=1}\big) \cdot G_X'(1) =$$

$$= EN \cdot E(X_1)$$

Teljesen hasonlóan:

$$D^2(Y) = D^2(N)\, E(X_1)^2 + E(N)\, D^2(X_1)$$

Biz: (4. állításé)

$$G_Y(z) = E(z^Y) = E(z^{X_1+\dots+X_N}) =$$

teljes ~~valószínűség~~ várható érték tétele

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E(z^{X_1+\dots+X_N} \mid N=n) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{E(z^{X_1+\dots+X_n})}\, \cdot P(N=n)$$

itt alkalmazzuk a

3. állítás következményét:

$$E(z^{X_1+\dots X_n}) = E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) \dots E(z^{X_n}) =$$

$$= \left[E\left(z^{X_1}\right)\right]^n$$

vagyis ezt felhasználva:

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[E\left(z^{X_1}\right)\right]^n \cdot P(N=n) = G_N\left(G_{X_1}(z)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^n P(N=n) = G_N(v)$$

Minden igaz esetnél, ha $N=0$ is lehet.

↓ ekkor $Y=0$.

Alkalmazások

1, M/M/1 rendszer

várakozási idő : Y
a kiszolgálásig

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Majd kiszámoljuk, hogy
N eloszlása pesszimista geometriai $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ paraméterrel.

$$\downarrow P(N=n) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{\lambda}{\mu},$$

ha $n = 0, 1, \ldots$

X: kiszolgálási idők

$\downarrow$ $X_1, X_2, \ldots \sim EXP(\mu)$

A várakozási idő átlaga (várható értéke) tehát:

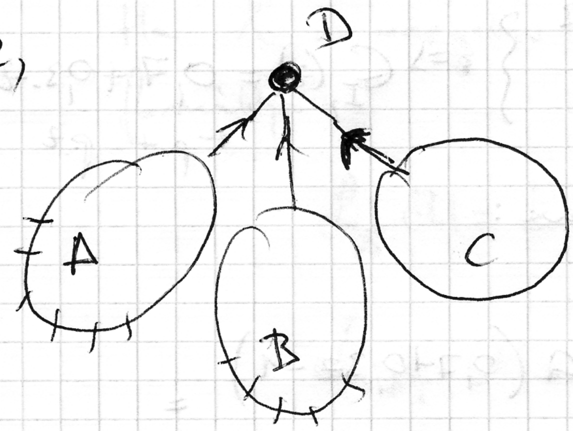
$$EY = EN \cdot EX_1 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-\lambda}{\mu\lambda}$$

$\lambda<\mu$ feltétel mellett (akkor stabil a kiszolgáló rendszer)

Ha $\lambda=\mu$, akkor kritikus

Ha $\lambda>\mu$ → egyre nagyobb a puffer. Akkor lehet, hogy a kiszolgálás sosem ér véget.

2)



A D-ben 1 s alatt beérkező session-ök száma N.

eloszlása $Poi(\lambda)$.

Egyes ~~[illegible]~~ igény vagy A, B, C-ből érkezik egymástól függetlenül.

A-ból érkezik 0,2 valószínűséggel.

B-ből érkezik 0,3 valószínűséggel.

C-ből érkezik 0,5 valószínűséggel.

Kérdés: Hányan érkeztek a B-ből 1 s alatt?

1 s alatt $N(B)$ számú igény érkezett B-ből.

Mi $N(B)$ eloszlása?

legyen $I_i = \begin{cases} 1, \text{ ha az igény } B\text{-ből érkezett} \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}$

Ekkor $N(B) = I_1 + I_2 + \ldots + I_N$ ← véletlen tagszámú összeg.

~~$N(B)$ generátor~~

A 4. állítás $\Rightarrow$

$$G_{N(B)}(z) = G_N\big(G_{I_1}(z)\big) =$$

$$N \sim Poi(\lambda) \Rightarrow G_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} P(I_1 = 1) &= 0{,}3 \\ P(I_1 = 0) &= 0{,}7 \end{aligned}\right\} \Leftarrow\Rightarrow G_{I_1}(z) = \underset{1-p+p\cdot z}{0{,}7 + 0{,}3\cdot z}$$

A 4. állítást használva:

$$= e^{\lambda\left(G_{I_1}(z) - 1\right)} = e^{\lambda\left(0{,}7 + 0{,}3z - 1\right)} =$$

$$= e^{\lambda(0{,}3z - 0{,}3)} = e^{0{,}3\lambda(z-1)}.$$

↑

ez $Poi(0{,}3\cdot\lambda)$ generátorfgv-e.

Általában is igaz, hogy ha van egy Poisson-folyamat, s minden érkezésnél döntünk, hogy megtartjuk vagy eldobjuk, akkor a kapott eloszlás is Poisson.

Folytonos esetben

$$G_X(z) = E(z^X)$$ marad, ha X nemnegatív egész értékű.

Ha X tetsz. valváltozó, akkor karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_X(z) = E\left(e^{izX}\right)$$

i = komplex egységgyök

$$\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z) \cdot \varphi_Y(z)$$

Ha X nemnegatív értékű, akkor a Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \cdot \mathcal{L}_Y(t)$$, ha X és Y függtlen.