2011. zh1:

(4) Mekkora a Bohr-modell alapállapotában levő elektronjának a kinetikus energiája?

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$L = n \cdot \hbar$$

$$r \cdot p = n \cdot \hbar$$

alapállapot $\Rightarrow n = 1$

$$r \cdot m \cdot v = \hbar$$

$$r = \frac{\hbar}{m \cdot v}, \quad m \cdot v = \frac{\hbar}{r}$$

$$F_{centrip.} = F_{Coulomb}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$m \cdot v^2 = \gamma \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$\frac{\hbar}{r} \cdot v = \gamma \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$\hbar \cdot v = \gamma \cdot e^2$$

$$v = \gamma \cdot \frac{e^2}{\hbar}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \underline{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\gamma \cdot \frac{e^2}{\hbar}\right)^2}$$

2011. zh 1:

⑥ Egy elektronmikroszkóp 15 keV kinetikus energiájú elektronokkal működik. Mekkora lenne a fotonok energiája egy ugyanilyen felbontású fénymikroszkópon?

$$E_{kin} = 15\,keV = 2{,}4 \cdot 10^{-15}\,J$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = 2{,}4 \cdot 10^{-15}$$

$$\Downarrow$$

$$v = 7{,}3 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot 10^{-11}\,m$$

fotonra:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \cong \underline{61{,}6\,keV}$$

2011. zh1:

7. Egy 5 eV magas 0,1 nm széles (négyszögletes) potenciálgáthoz 3 eV energiájú elektron érkezik. Kb. mekkora valószínűséggel megy át a potenciálgáton?

Gamow-formula alapján:

$$T_G = e^{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{V(x)-E}\,dx} = e^{-2\cdot\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\cdot\sqrt{V(x)-E}\cdot L}$$

$V(x) = 5\,eV \quad E = 3\,eV$

$L = 0{,}1\,nm$

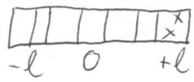
$T_G = 0{,}24 \Rightarrow \underline{\underline{24\%}}$

2011. zh1:

(8.) Mekkora a rendszáma annak az elemnek, amelynek „utolsó" elektronja $(4p)^2$ állapotú?

1 s [1.]
2 s p [2., 3.]
3 s p d [4., 5.]
4 s p d f

s: 2	$l=0$	
p: 6	$l=1$	$(2l+1)\cdot 2\ e^-$
d: 10	$l=2$	



$$\begin{array}{cccccccc} 1s & 2s & 2p & 3s & 3p & 4s & 3d & (4p)^2 \\ 2\,+ & 2\,+ & 6\,+ & 2\,+ & 6\,+ & 2\,+ & 10\,+ & 2 = 32 \end{array}$$

A rendszáma az elemnek 32. ⇒ germánium

(9) Egy hidrogén atomban az elektron pályamozgásból származó mágneses momentuma $4{,}16 \cdot 10^{-2\cancel{5}3}$ [SI egység]. Mágneses térben hányféle irányban állhat be ez a mágneses momentum?

$$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}\ Am^2$$

$$M = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$20 = l(l+1)$$

$$\Downarrow$$

$$l = 4$$

$$M_z = -\mu_B \cdot m_l$$

$$m_l = 0 \pm 1 \ldots \pm l \ \ni 2l+1 \text{ db}$$

$$\Downarrow$$

9 féle irányban állhat be

2011. zh 1:

(10) Egy ω frekvenciájú, egydimenziós oszcillátor a Ψ állapotfüggvénye olyan, hogy a $|\Psi|^2$-nek 3db maximuma van. Ekkor az oszcillátor energiája?

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$n = 0$:

$|\Psi|^2$-nek 3db maximuma $\Rightarrow n = 2$

$\Downarrow$

$$\underline{E = \frac{5}{2}\hbar\omega}$$

2011. zh 1:

7.

Ismert az $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$ kommutátor kapcsolat. $\hat{A}$ és $\hat{B}$ önadjungáltak.
Ebből $\hat{C}$?

Mivel $\hat{A}$ és $\hat{B}$ önadjungáltak: $\hat{A}^+=\hat{A}$ és $\hat{B}^+=\hat{B}$

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$$

$$\hat{C}^+=\left([\hat{A},\hat{B}]\right)^+=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^+=(\hat{A}\hat{B})^+-(\hat{B}\hat{A})^+=\hat{B}^+\hat{A}^+-\hat{A}^+\hat{B}^+=$$

$$\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}=[\hat{B},\hat{A}]=-\hat{C}\Rightarrow \text{ferdén önadjungált}$$

Jegyzet 46. old. alapján:

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}=j\hat{D}$$

$\hat{C}$: nem önadjungált

$\hat{D}$: önadjungált

8.

A dinamikai változókhoz azért önadjungált operátorokat rendelünk, mert ezek sajátértékei valósak.

2011. zh1:

9.

Az $\hat{A}(x)$ operátor sajátfüggvényei $A\sin(aX)$, a $\hat{B}(x)$ operátor sajátfüggvényei $B\cos(bX)$. Ekkor a $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ operátor sajátfüggvényei....

$$\hat{A}\Psi = \alpha\Psi$$

$$\hat{B}\varphi = \beta\varphi$$

$$(\hat{A} + \hat{B})\phi = \gamma\phi$$

$$A\sin(aX) = A \cdot \frac{e^{iaX} - e^{-iaX}}{2i}$$

$$B\cos(bX) = B \cdot \frac{e^{ibX} + e^{-ibX}}{2}$$

$$\hat{C} \rightarrow \phi = C \cdot e^{icX}$$

10.

Az $\hat{X}$ operátor sajátállapota: $\delta(X - X_0)$

2011. zh1.

(11)

A Hidrogén atomban a proton és az alapállapotú elektron spinje párhuzamosan vagy ellentétesen áll egymáshoz képest. Átfordulás-bor az atom 21 cm-es elektromágneses hullámot bocsát ki. A párhuzamos állapot energiájának nagysága ezért, ...

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 9{,}5 \cdot 10^{-25}\,J$$

E-vel nagyobb, mint az ellentétesé.

(12.)

Ahhoz, hogy egy (egydimenziós) potenciálgödörben egyetlen kötött állapot se létezhessen, az kell, hogy a potenciálgödör „V" magassága ....

TK 16. alapján: Egydimenzióban mindig van legalább egy kötött állapot

$\Downarrow$

$V=0$ esetén $\rightarrow$ már nem potenciálgödör $\rightarrow$ nincs kötött állapot

2011. zh1:

13.

Egy „ω" frekvenciájú harmónikus oszcillátor a $\Psi(X) = c_1 + c_3 X^2 e^{-X^2}$ állapotban van. Ekkor az oszcillátor energiájára igaz, hogy....

n	$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$	Ψ alakja
0	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$c_0 e^{-\frac{\alpha}{2}X^2}$
1	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$c_1 X e^{-\frac{\alpha}{2}X^2}$
2	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	$(c_0 + c_2 X^2) e^{-\frac{\alpha}{2}X^2}$
3	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	$(c_1 X + c_3 X^3) e^{-\frac{\alpha}{2}X^2}$

Az adott Ψ esetén: $n = 2 \Rightarrow E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

14.

A rezonáns alagút dióda megvalósítása epitaxiális rétegek segítségével történik.

15.

Az ún. FLASH memóriánál a jellegzetes kvantummechanikai effektus az alagút-effektus.

2011. zh2:

①

Egy $B = 10T$ erősségű mágneses térben lévő hidrogén energiaszintjeinek a „távolsága"?

TK 67:

$$\omega_L = \frac{e \cdot B}{2m} \qquad \mathcal{E}_n = E_n + \hbar \omega_L \cdot m_\ell \qquad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \ell$$

$$\Downarrow$$

az energiaszintek távolsága: ~~$\mathcal{E}_n$~~ $\hbar \omega_L$

②

Tudjuk, hogy $\hat{H} \varphi_i = E_i \varphi_i$, $i = 1,2$. Legyen $\varphi = 0{,}5(\sqrt{3}\,\varphi_1 \pm j\,\varphi_2)$ állapotban. Hozzávetőlegesen hány alkalommal lesz a mérés eredménye φ_i, ha 1000-szer megmérjük az elektron energiáját?

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{j}{2}\right|^2 = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\substack{\text{annak a}\\ \text{valószínűsége, hogy}\\ \varphi_1\text{-t mérünk}\\ \text{egy elemi mérés}\\ \text{során}}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{annak a valószínűsége,}\\ \text{hogy } \varphi_2\text{-t mérünk}\\ \text{egy elemi mérés}\\ \text{során}}} \stackrel{?}{=} 1 \checkmark$$ ← normálva van

$\varphi_1 : 1000 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow 750$

$\varphi_2 : 1000 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 250$

2011. zh2:

(3.)

Mekkora annak az elektronnak a sebessége, aminek hullámhossza megegyezik az 1eV energiájú foton hullámhosszával?

foton:

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{1eV}$$

e^-:

$$E = h \cdot \frac{v}{\lambda} = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{m \cdot v}{2} \Rightarrow \frac{1eV}{c} = \frac{mv}{2} \Rightarrow \frac{2eV}{mc} = v$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{1172 \frac{m}{s}}$$

(5.) Az elektronspin nagysága SI egységekben?

TK 69:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar = 9{,}13 \cdot 10^{-35} \text{ [SI egység]}$$

2011. zh2.

7.

A megadottak közül melyek lehetnek egy rendszer állapotai?

Ψ: pálya állapot α, β, χ: spin állapotok

ϕ_A: $[\Psi_3(1)\Psi_4(2) - \Psi_4(1)\Psi_3(2)]\,\chi(1,2)$

ϕ_B: $[\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)] \cdot \Psi(1,2)$

ϕ_C: $[\Psi_3(1)\Psi_4(2) + \Psi_4(1)\Psi_5(2)]\,\chi(1,2)$

A feladat lényege, hogy a rendszer állapotainak vagy szimmetrikusnak vagy antiszimmetrikusnak kell lennie. Ez igaz külön-külön a pálya állapotra és a spin állapotra is ebben az esetben (mivel szeparálható). Ezeket a feltételeket kell megvizsgálni.

ϕ_A:

$1 \leftrightarrow 2$ csere esetén: pályaállapot: anti-szim. χ ✓ (feltételezzük)

ϕ_B:

$1 \leftrightarrow 2$ csere esetén: spinállapot: szim. Ψ ✓ (feltételezzük)

ϕ_C:

$1 \leftrightarrow 2$ csere esetén: pályaállapot: ↯ se nem szim., se nem antiszim. χ ✓ (feltételezzük)

Tehát csak a ϕ_A és ϕ_B lehetnek egy rendszer állapotai.

2011. zh2:

9.

$\chi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$ spin állapotfv. Mekkora az „x" irányban mért $\langle S_x \rangle$ spin várható értéke?

$$\langle S_x \rangle = \langle \chi | \hat{S}_x | \chi \rangle = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$

$$\chi : \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^T \right)^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$\hat{S}_x$ Pauli-mátrix

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{3} \cdot \hbar}{4}}$$

2011. zh2:

10.

Egy oszcillátor második energiaszintjének „kiszélesedése" az energiaszint ezred része. „Fél-klasszikus" szemlélet szerint kb. hány teljes periódust tesz meg, az ezen a pályán való tartózkodás ideje alatt?

Az energia és idő közötti határozatlansági reláció alapján:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E = \frac{E_2}{1000} = \frac{\frac{3}{2}\hbar\omega}{1000} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta E = \frac{\frac{3}{2}\hbar \cdot \frac{2\pi}{T}}{1000}$$

$$\frac{\frac{3}{2}\cancel{\hbar}\frac{2\pi}{T}}{1000} \cdot \Delta t \geq \frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{6\pi}{1000\,T} \cdot \Delta t \geq 1$$

$$\Delta t \geq \frac{1000}{6\pi} \cdot T$$

$$\Delta t \geq 53 \cdot T$$

Kb. 53 teljes periódust tesz meg.

2011. zh2:

1.

Az atomok energia szintjeinek betöltődési sorrendje azért nem követi szigorúan az energia szintek sorrendjét, mert az elektronok taszítása miatt az energiaszintek a mellékkvantumszámtól is függeni fognak.

2.

A „px" állapotnak az Y-Z síkban van a „csomósíkja".

3.

Egy hidrogén atom adott, gerjesztett állapotában a „spin-pálya" kölcsönhatás egzaktul nulla. Akkor az elektron biztos, hogy ..... állapotban van.

A „spin-pálya" kölcsönhatást jellemző potenciális energia:

$$V = -a \cdot \underline{L} \cdot \underline{S}$$

$$S \text{ nem lehet } 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow L = \hbar\sqrt{l(l+1)} \Rightarrow l = 0 \checkmark$$

$$l = -1 \ \lightning$$

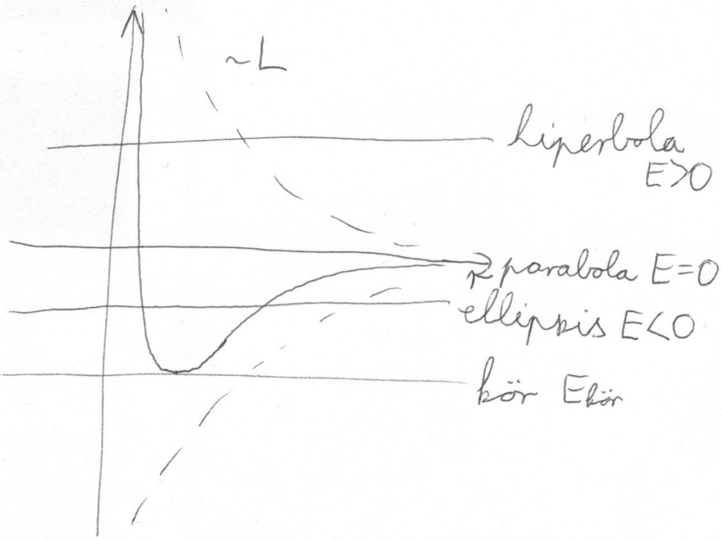
A keresett állapot: $l = 0$.

2011. zh2:

④

Centrális erőtérben egy adott „L" perdületű kötött állapot maximális energiája....

TK 55:



$L =$ állandó

$E \geq E_{kör} \Rightarrow$ nem kör esetén maximális

Kötött állapot csak $E<0$ esetén lehetséges: kör vagy ellipszis

A körpályánál az ellipszis pálya magasabb energiaszinten van, viszont a parabola pálya már nem kötött állapot, így:

Centrális erőtérben egy adott „L" perdületű kötött állapot maximális energiája <u>ellipszis pálya esetén van.</u>

2011. zh2:

5.

A „Z" irányú spin mérhető értéke $\pm \frac{\hbar}{2}$ és az „X" irányú spin mérhető értéke határozatlan.

6.

Larmor körfrekvenciának nevezzük a B mágneses térben lévő impulzusvektor precessziós szögsebességét.

7.

Elsőrendű perturbációszámítás esetén az állapotfüggvény a perturbálatlan rendszer hullámfüggvényeinek lineáris kombinációja.

Megj: nem degenerált esetben ez azt jelenti, hogy a hullámfüggvény nem változik meg

8.

Időfüggő perturbáció számítás akkor használatos, ha a perturbációt leíró operátor időfüggő.

9.

A LASER működésének alapvető, elemi fizikai folyamata az indukált emisszió.

10.

Az ún. „kiválasztási szabályok" megadják azt, hogy az atomban milyen energiaátmenetek lehetségesek.

2011. zh2:

11.

He atom esetén az alapállapotban a pályaállapot szimmetriája (a két elektron felcserélésére nézve) <u>szimmetrikus</u>.

elektron → fermion → spinpálya állapotfüggvény antiszimmetrikus

A spinpálya állapotfüggvény (a spin-pálya kölcsönhatás elhanyagolása esetén) a pálya állapotfv és a spin állapotfv szorzata.

TK kieg 4.1:

E_b ———

E_a ——— $\boxed{\uparrow\downarrow}$ Ψ_a

spin állapotfv
↓
antiszimmetrikus
↓
pálya állapotfv ⇒ szimmetrikus
↑
azért szükséges, hogy a kettő szorzata antiszimmetrikus spinpálya állapotfv-t adjon

2011. zh2:

(12)

A H_2^+ molekula ion esetén a Hamilton operátor a következő:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - V_c(r_A) - V_c(r_B) + V_c(R), \text{ ahol:}$$

$$V_c(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$ (TK 89. o.)

(13)

Az ún. egy-részecske közelítés azt jelenti, hogy az „N" részecskés rendszer teljes $\phi(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_N})$ állapotfüggvényét $\phi_1(\overline{X_1}) \cdot \phi_2(\overline{X_2}) \cdot \ldots \cdot \phi_N(\overline{X_N})$ alakban írhatjuk fel.

$$\phi_i(\overline{X_i})$$

állapot azonosító részecske azonosító

(14)

A Pauli-mátrixok a következők:

TK kieg 19:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

2011. zh2:

15.

Két elektronos rendszerben az „egyensúlyi pontokat" jelölje Ψ_A és Ψ_B. Ekkor a két elektron között fellépő ún. „kicserélődési kölcsönhatás" a következő:

TK kieg 43:

$$E_x = \int \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Psi_A(1)\Psi_B^*(1) \cdot \Psi_B(2) \cdot \Psi_A^*(2)}{r_1 - r_2} \, dV_1 \, dV_2$$