Keresztfélév - 3. vizsga
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Egy valószínűségi változót egyszerűnek nevezünk, ha véges az értékkészlete. Hogyan definiáljuk egy egyszerű valószínűségi változó várható értékét?

   b) Mit értünk az alatt, hogy egy valószínűségi változó örökifjú a $[0;\infty)$ intervallumon? Milyen eloszlású valószínűségi változók teljesítik a fenti tulajdonságot?

   Megoldás:

   a)

   (5 pont) Egy X egyszerű valószínűségi változó várható értékét az

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in \mathrm{ran}X} k\cdot \mathbb{P}(X=k)$$

   formulával definiáljuk, ahol $\mathrm{ran}X$ az X értékkészlete.

   b)

   Az X valószínűségi változót örökifjúnak nevezzük a $[0;\infty)$ intervallumon, amennyiben

   (1 pont) $\mathbb{P}(X\in[0;\infty)) = 1$, azaz X értékei 1 valószínűséggel nemnegatívak (ehelyett $\mathrm{ran}X = [0;\infty)$ is elfogadható), és

   (2 pont)

   $$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

   teljesül minden $s,t\in[0;\infty)$ esetén.

   (2 pont) Egy X valószínűségi változó pontosan akkor örökifjú a $[0;\infty)$ intervallumon, ha $X\sim Exp(\lambda)$ valamilyen $\lambda>0$ paraméterrel.

   (Ha következtetésnek csak az egyik iránya szerepel, akkor a 2 pontból 1 jár.)

2. Béla minden héten próbára teszi a szerencséjét, és vásárol 3 darab sorsjegyet. Mindig két különböző típusú sorsjegy közül választ, de mindig csak egy típusból vásárol 3 darabot. Az A típusú sorsjegyek esetén átlagosan minden 12-edik nyer, míg egy B típusú sorsjegynél 10% a nyerés esélye. Hogy egy

adott héten melyik sorsegyeből vesz 3 darabot, azt is a szerencsére bízza: minden alkalommal feldob egy pénzérmét, és ha fejet dob, akkor az A típust választja, különben pedig a B típust. Mi a valószínűsége, hogy Béla egy adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer? Feltéve, hogy Béla egy adott héten nyert, mi a valószínűsége, hogy az A típusból vásárolt?

Megoldás:

(1 pont) Legyen F az az esemény, hogy Béla az adott héten fejet dob a pénzérmével és így az A típusú sorsjegyből vásárol. Legyen továbbá I az, hogy írást dob, ekkor $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(I) = \frac{1}{2}$.

(0 pont) Legyen W az az esemény, hogy Béla az adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer, ekkor az első kérdés a $\mathbb{P}(W)$ valószínűség.

(1 pont) Az F, és I események teljes eseményrendszert alkotnak,

(1 pont) ezért alkalmazható rájuk a teljes valószínűség tétele:

$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(W \mid I)\,\mathbb{P}(I) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(W \mid F) + \mathbb{P}(W \mid I)).$$

(1 pont) Egy A típusú sorsjegy $\frac{11}{12}$ valószínűséggel nem nyer, így annak a valószínűsége, hogy három sorsjegy közül eggyel sem nyer $\left(\frac{11}{12}\right)^3$, vagyis $1-\left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{397}{1728} \approx 0{,}2297$ valószínűséggel nyer legalább az egyik sorsjeggyel, ez tehát $\mathbb{P}(W \mid F)$ értéke.

(1 pont) Hasonlóképp $\mathbb{P}(W \mid I) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{271}{1000} = 0{,}271.$

(1 pont) Vagyis $\mathbb{P}(W) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(W \mid F) + \mathbb{P}(W \mid I)) \approx 0{,}2504.$

(1 pont) A második kérdés a $\mathbb{P}(F \mid W)$ valószínűség.

(1 pont) A Bayes-tételt alkalmazva

(1 pont)

$$\mathbb{P}(F \mid W) = \frac{\mathbb{P}(W \mid F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(W)}$$

(1 pont) $\approx \frac{0{,}2297 \cdot 0{,}5}{0{,}2504} \approx 0{,}4585.$

3. Választunk egy számot véletlenszerűen a $[-1; 1]$ intervallumon, majd tőle függetlenül még egyet a $[-2; 3]$ intervallumon. Mi a valószínűsége, hogy a két szám előjele megegyezik?

Megoldás:

(3 pont) A két szám választása megfelel egy pont választásának az $\Omega = [-1; 1] \times [-2; 3]$ téglalapon, ez tehát az eseménytér, a számok pedig a választott pont koordinátái.

(3 pont) Legyen A az esemény, hogy a két szám előjele megegyezik, ekkor vagy mindkét koordináta negatív, vagy pedig mindkettő pozitív, tehát A a $[-1; 0) \times [-2; 0)$ és a $(0; 1] \times (0; 3]$ téglalapok uniója.

(3 pont) Vagyis a keresett valószínűség a téglalapok területösszegének és az Ω téglalap területének aránya:

(1 pont)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$$

4. Legyenek $X \sim N(1; 4)$ és $Y \sim N(-1; 9)$ független, normális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki a $\mathbb{P}(X > 2)$ és az $\mathbb{E}((X + Y)^2)$ értékeket.

Megoldás:

(1 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F_X(2)$, ahol F_X az X eloszlásfüggvénye.

(2 pont) A tanultak szerint $1 - F_X(2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1 - \Phi(0{,}5)$

(1 pont) $\approx 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$.

(1 pont) Továbbá $\mathbb{E}((X+Y)^2) = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2)$,

(1 pont) a várható érték linearitása miatt pedig ez $\mathbb{E}(X^2) + 2\,\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2)$.

(1 pont) Itt az X és az Y változók függetlensége miatt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot (-1) = -1$, ahogy az az eloszlások paramétereiből kiolvasható.

(1 pont) Valamint $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 4 + 1 = 5$,

(1 pont) hasonlóképp $\mathbb{E}(Y^2) = 9 + 1 = 10$,

(1 pont) tehát $\mathbb{E}((X+Y)^2) = 5 - 2 + 10 = 13$.

Az $\mathbb{E}((X+Y)^2)$ várható érték természetesen másképp is kiszámolható, és így az utolsó 6 pont másképp is megszerezhető. Az alábbiakban két másik lehetőséget is részletezünk.

Első variáns:

(2 pont) $\mathbb{E}((X+Y)^2) = \mathbb{D}^2(X+Y) + \mathbb{E}(X+Y)^2$,

(2 pont) Az X és az Y függetlensége miatt $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) = 4 + 9 = 13$,

(1 pont) továbbá a várható érték linearitása miatt $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 - 1 = 0$,

(1 pont) így $\mathbb{E}((X+Y)^2) = \mathbb{D}^2(X+Y) = 13$.

Második variáns:

(4 pont) Az előadáson tanult tétel szerint, mivel X és Y független normális eloszlású változók, így $X+Y$ eloszlása normális, a várható érték pedig az X és Y várható értékeinek összege, továbbá a szórásnégyzet az X és Y szórásnégyzeteinek összege, vagyis $X + Y \sim N(0; 13)$.

(2 pont) $\mathbb{E}((X+Y)^2) = \mathbb{D}^2(X+Y) + \mathbb{E}(X+Y)^2 = 13 + 0 = 13$

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat. Határozzuk meg Y-nak az X-re vett lineáris regresszióját.

Y \ X	0	1
0	1/20	1/2
2	1/5	1/4

Megoldás:

(1 pont) Az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója a $\beta X + \alpha$ változó, ahol

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}, \qquad \alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X).$$

(1 pont) Az X eloszlása: $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

(1 pont) így X várható értéke $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{4}$.

(1 pont) A transzformált várható értékére vonatkozó formula szerint

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{4},$$

(1 pont) tehát $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$.

(1 pont) Az Y eloszlása $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$, $\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$,

(1 pont) így Y várható értéke $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y=0) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y=2) = \frac{9}{10}$.

(1 pont) $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10} = \mathbb{E}(XY) - \frac{27}{40}$.

(1 pont)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= 0\cdot 0\cdot \mathbb{P}(X=0,Y=0) + 1\cdot 0\cdot \mathbb{P}(X=1,Y=0)\\ &\quad + 0\cdot 2\cdot \mathbb{P}(X=0,Y=2) + 1\cdot 2\cdot \mathbb{P}(X=1,Y=2) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

azaz $\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{7}{40}$.

(1 pont) Tehát

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)} = -\frac{7/40}{3/16} = -\frac{14}{15}, \qquad \alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\,\mathbb{E}(X) = \frac{9}{10} + \frac{14}{15}\cdot\frac{3}{4} = \frac{8}{5},$$

vagyis a lineáris regresszió $-\frac{14}{15}X + \frac{8}{5}$.

Ha valaki az X-nek az Y-ra vonatkozó lineáris regresszióját számolja ki, akkor analóg pontozás mellett az összpontszám felét kapja meg (felfelé kerekítve).

6. Egy jeladó tesztelése során megpróbálják annak koordinátáit különböző helyeken bemérni. Tegyük fel, hogy a mérési hiba, azaz a mért és a tényleges helyzet (méterben mért) távolsága normális eloszlást követ, melynek szórása ismeretlen. Szerkesszünk 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot a hiba várható értékére, ha a tesztelés során elvégzett 10 mérésnél keletkező hibák rendre

$$10{,}2\text{ m};\ 7{,}5\text{ m};\ 9{,}0\text{ m};\ 4{,}1\text{ m};\ 3{,}7\text{ m};\ 6{,}6\text{ m};\ 6{,}4\text{ m};\ 1{,}7\text{ m};\ 10{,}8\text{ m};\ 5{,}0\text{ m}.$$

Megoldás:

(2 pont) A konfidenciaintervallum $(\overline{x} - r_\varepsilon; \overline{x} + r_\varepsilon)$ alakú, ahol $\overline{x}$ a mintaátlag, az intervallum sugara pedig

$$r_\varepsilon = \frac{t_{\varepsilon/2}(9)s^*}{\sqrt{9}},$$

ahol s^* a korrigált tapasztalati szórás, $\varepsilon = 0{,}05$, $t_{\varepsilon/2}(9)$ pedig a $t(9)$ 9 szabadságfokú Student-eloszlás $1-\varepsilon/2$ kvantilise.

(1 pont) Ez utóbbi érték az eloszlástáblázat alapján $t_{\varepsilon/2}(9) = 2{,}262$.

(1 pont) A mintaátlag

$$\overline{x} = \frac{10{,}2+7{,}5+9{,}0+4{,}1+3{,}7+6{,}6+6{,}4+1{,}7+10{,}8+5{,}0}{10} = \frac{65}{10} = 6{,}5.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s^{*\,2} = \frac{n}{n-1}s^2$, ahol s^2 a tapasztalati szórásnégyzet, n pedig a minta elemszáma (jelen esetben 10), a tapasztalati szóránégyzet pedig az $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ képlettel számolható,

(1 pont) ahol

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \frac{10{,}2^2+7{,}5^2+9{,}0^2+4{,}1^2+3{,}7^2+6{,}6^2+6{,}4^2+1{,}7^2+10{,}8^2+5{,}0^2}{10}\\ &= \frac{104{,}04+56{,}25+81+16{,}81+13{,}69+43{,}56+40{,}96+2{,}89+116{,}64+25}{10} = 50{,}084,\end{aligned}$$

(1 pont) így tehát

$$s^{*\,2} = \frac{10}{9}\cdot(50,084 - 6{,}5^2) = \frac{10}{9}\cdot 7{,}834 \approx 8{,}7044.$$

(1 pont) A korrigált tapasztalati szórás tehát $s^* = \sqrt{s^{*\,2}} \approx \sqrt{8{,}7044} \approx 2{,}9503$.

Ha az általános képletek nem szerepelnek, de a hibátlan helyettesítés igen, akkor a képletekért járó pont is megadandó. Ha a megoldó számológép segítségével számolja az átlagot és a korrigált tapasztalati szórást közvetlenül a mintából (tehát a fenti helyettesítéseket nem végzi el), a korrigált tapasztalati szórás és szórásnégyzet, valamint a tapasztalati szórásnégyzet képletének (vagy egy összevont képletnek), illetve az $\overline{x^2}$ értelmezésének szerepelnie kell az előző 4 pontért. Ezek bármelyikének hiányáért egyenként 1 pont levonás jár a fenti 4-ből (vagyis például egy puszta eredményközlés esetén mindössze az átlagért jár pont).

(1 pont) Tehát az r_ε sugár

$$r_\varepsilon = \frac{2{,}262 \cdot 2{,}9503}{3} \approx 2{,}2245,$$

(1 pont) és így a konfidenciaintervallum

$$(6{,}6 - 2{,}9503; 6{,}5 + 2{,}9503) = (4{,}2755; 8{,}7245).$$