ANALÍZIS(2) — VIZSGADOLGOZAT — α variáns — 2007. jún. 14.

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{(n+1)!}$$

9

a.) $a_k > 0$ és 1

$\boxed{3}$ $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1 \implies \sum^{\infty} a_n$ konv. 1

$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1$ vagy $c = \infty \implies \sum^{\infty} a_n$ div. 1

b.) $\boxed{7}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{(n+2)^n} = \underbrace{\frac{(n+3)^n}{(n+2)^n}}_{\frac{(1+\frac{3}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}} \underbrace{\frac{n+3}{n+2}}_{\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}} \to \frac{e^3}{e^2} \cdot \frac{1}{1} = e > 1$ 2 4

$\implies \sum^{\infty} a_n$ divergens 1

2. feladat (13 pont)

a) Írja fel az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és oldja meg!

b) A homogén vagy az inhomogén differenciálegyenlet megoldásai alkotnak lineáris teret? Hány dimenziós ez a lineáris tér?

a.) $y' + g(x) \cdot y = 0, \quad g \in C^0_I$ 2

b)

$y' + g(x) \cdot y = 0$ (szeparábilis differenciálegyenlet)

$\frac{dy}{dx} = -g(x) \cdot y$ $\quad y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$: $$\int \frac{dy}{y} = -\int g(x)\,dx\,.$$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| = -G(x) + C_1$$

$$|y| = e^{C_1} e^{-G(x)} = K e^{-G(x)}, \quad K > 0$$

an2v070614/1 α

$$\left.\begin{array}{ll} y > 0: & y = K e^{-G(x)} \\ y < 0: & y = -K e^{-G(x)} \\ & (K > 0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \implies y = C e^{-G(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$ 8

az általános megoldás.

A megoldást azon az (α, β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.

(Ha $y(x_0) = y_0 \implies y_0 = C e^{-G(x_0)}$-ból C egyértelműen meghatározható.)

9

b.) $\boxed{3}$ Az inhomogén de. megoldásai nem alkotnak lineáris teret.
A homogén de. megoldásai lineáris teret alkotnak. Az előző megoldásból látható, hogy a tér 1 dimenziós.

3. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^4}}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát! Írja fel az első négy nem nulla tagot elemi műveletekkel!

b) $f^{(12)}(0) = ?$

a.) $f(x) = (1+5x^4)^{-1/3} = \sum_0^{\infty} \binom{-1/3}{n} (5x^4)^n = \sum_0^{\infty} \binom{-1/3}{n} 5^n x^{4n} =$

$= 1 + \frac{-1/3}{1} 5x^4 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{1 \cdot 2} 5^2 x^8 + \underbrace{\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{a_{12}} 5^3 x^{12} + \ldots$ 6

$|5x^4| = 5|x|^4 < 1 \implies |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \implies R = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ 2

b.) $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$\implies f^{(12)}(0) = 12!\, a_{12} = 12!\, \frac{-14}{3^4} 5^3$ 3

an2v070614/2. α

4. feladat (19 pont)

$$f(x,y) = \cos(\pi x^2 y^4) \quad , \qquad P = P(1/2, 1)$$

a) Totálisan differenciálható-e az f függvény az adott pontban? $\operatorname{grad} f(P) = ?$

b) Számolja ki az f függvénynek a $P(1/2,1)$ pontbeli $\underline{v} = (-5,-1)$ irányú iránymenti deriváltját!

c) Mennyi az f függvény $P(1/2,1)$ pontbeli legnagyobb, illetve a legkisebb iránymenti deriváltja?

a.) $f'_x = -\sin(\pi x^2 y^4)\cdot 2\pi x y^4$ } K_P-ben léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P)\ \exists$ (2)

(5) $f'_y = -\sin(\pi x^2 y^4)\cdot 4\pi x^2 y^3$

(Vagy f'_x, f'_y mindenütt léteik és folytonos $\Rightarrow$ grad f mindenütt léteik.)

$\operatorname{grad} f(P) = f'_x(P)\,\underline{i} + f'_y(P)\,\underline{j} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{\pi}{2}\,\underline{j}$ (2)

b.) $\frac{df}{d\underline{e}} = \operatorname{grad} f(P)\cdot \underline{e}$ (2)

$|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{26}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\,\underline{j}$ (1)

$\frac{df}{d\underline{e}} = \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\underline{i} - \frac{\pi}{2}\,\underline{j}\right)\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\,\underline{j}\right) = \frac{5\pi}{\sqrt{52}} + \frac{\pi}{\sqrt{52}} = \frac{6\pi}{\sqrt{52}}$ (2)

c.) $\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_P = |\operatorname{grad} f(P)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}} = \pi$ (3)

$\min \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_P = -|\operatorname{grad} f(P)| = -\pi$ (2)

5. feladat (7 pont)

a) Mit nevezünk az f függvény x_0 bázispontú, n-edrendű Taylor polinomjának, illetve a hozzá tartozó Lagrange féle maradéktagjának?

b) Mondja ki a függvény és Taylor sorának megegyezésére tanult elégséges tételt!

a.) Taylor polinom: f legalább n-szer differenciálható x_0-ban:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ (3)

an2v-070614/3. (α)

Lagrange-féle a'akban felírt maradéktag

(T) Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$-ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$ (2)

b)

Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

(T) Ha f akárhányszor differenciálható $(-R,R)$-en és $f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

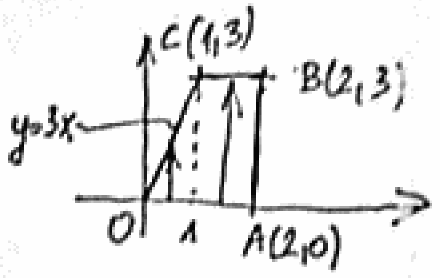
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad x \in (-R,R)\text{-en.}$$ (2)

6. feladat (15 pont)*

Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az alábbi kettősintegrált majd az egyik módon számolja ki:

$$\iint_T (18xy^2 - 9y)\, dT\,,$$

ahol T az $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$ és a $C(1,3)$ pontok által meghatározott trapéz.



$$\int_0^1 \int_0^{3x} f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^3 f(x,y)\, dy\, dx$$ (5)

$$\int_0^3 \int_{x=\frac{y}{3}}^{2} f(x,y)\, dx\, dy$$ (3)

A 2. kétszeres integrállal érdemes dolgozni.

$$\int_0^3 \int_{x=\frac{y}{3}}^{2} (18xy^2 - 9y)\, dx\, dy = \int_0^3 9x^2y^2 - 9yx \Big|_{x=\frac{y}{3}}^{2} dy =$$

$$= \int_0^3 (\underbrace{36y^2 - 18y - y^4}_{39y^2 - 18y - y^4} + 3y^2)\, dy = 13y^3 - 9y^2 - \frac{y^5}{5}\Big|_0^3 = 13\cdot 3^3 - 81 - \frac{3^5}{5}$$ (7)

an2v-070614/4 (α)

7. feladat (9 pont)*

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

a) Írja le a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket!

b) $f'(z) = ?$ Adjon két különböző képletet a parciális deriváltakkal!

Tudjuk, hogy a $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3y$ egy reguláris f függvény imaginárius része.

$f'(-1+2i) = ?$

a.) u, v totálisan deriválható és

$u'_x = v'_y$ (3)

$u'_y = -v'_x$

b.) $f'(z) = u'_x(x,y) + i v'_x(x,y) = v'_y + i v'_x = \dots$ (2)

$v'_x = 3x^2 - 3y^2$ $\quad v'_x(-1,2) = -9$

$v'_y = -6xy + 3$ $\quad v'_y(-1,2) = 15$

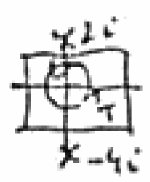
$f'(-1+2i) = v'_y(-1,2) + i\,v'_x(-1,2) = 15 - 9i$ (4)

8. feladat (16 pont)*

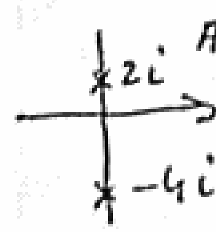
a)
$$\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z-2i)(z+4i)}\,dz = ?$$

b)
$$\oint_{|z|=3} \frac{z}{(z-2i)(z+4i)}\,dz = ?$$

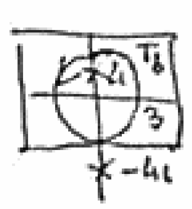
c)
$$\oint_{|z|=5} \frac{z}{(z-2i)(z+4i)}\,dz = ?$$

$\boxed{3}$ a.) 
$\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z-2i)(z+4i)}\,dz = 0$ (Cauchy-féle alaptétel)

reg T-n



Az integrandus sing. pontjai (2)

$\boxed{5}$ b.) 
$\oint_{|z|=3} \frac{\frac{z}{z+4i}}{z-2i}\,dz = 2\pi i \left.\frac{z}{z+4i}\right|_{z=2i} = \frac{2}{3}\pi i$ (3) (2)

reg e.ö.f. T_0-n

$\boxed{6}$ c.) 
$\oint_{L_0} \frac{z}{(z-2i)(z+4i)}\,dz$ $\oint_{L_1} \frac{\frac{z}{z+4i}}{z-2i}\,dz + \oint_{L_2} \frac{\frac{z}{z-2i}}{z+4i}\,dz =$ (4)

reg T_1-en $\quad$ reg T_2-n

$= 2\pi i \Big(\underbrace{\left.\frac{z}{z+4i}\right|_{z=2i}}_{1} + \underbrace{\left.\frac{z}{z-2i}\right|_{z=-4i}}_{\frac{2}{3}} \Big) = 2\pi i \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 2\pi i$ (2)

a12o-070614/5 α

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$y'' - 7y' + 10y = x$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$y_{ia} = y_H + y_{ip}$ (1)

H: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ (2) $\dots \Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 2$

$y_H = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$ (3)

$10 \,|\, y_{ip} = Ax + B$ (1) $\qquad 10Ax + 10B - 7A = x$

$-7 \,|\, y'_{ip} = A$ $\qquad \Rightarrow A = \frac{1}{10}, \ B = \frac{7}{100}$

$\ \ \,|\, y''_{ip} = 0$

$y_{ip} = \frac{1}{10}x + \frac{7}{100}$ (3)

$y_{ia} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}x + \frac{7}{100}$

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

Írja fel az f függvény origó körüli, valamint $x_0 = 2$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

$x_0 = 0$

$f(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\right)$ (3)

K.T.: $\left|\frac{x}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow R_1 = 4$ (2)

$x_0 = 2$

$f(x) = \frac{1}{(x-2)-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$ (3)

K.T.: $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow R_2 = 2$ (2)

an2o-070614/6 α