Matematika A1 3. vizsga

2022. január 13.

1. (10+10 pont)

   (a) Igazoljuk, hogy $\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

   (b) Számoljuk ki az $x - y - z = 3$ sík és az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = 2 - z$ egyenes távolságát.

Megoldás. *a*) $\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$, és a műveletek kommutatívak **(4+4+2 pont)**
b) A sík $(1, -1, -1)$ normálvektora (**1 pont**) és az egyenes $(2, 3, -1)$ irányvektora (**1 pont**) merőlegesek egymásra (**2 pont**), így az egyenes és a sík párhuzamos (**1 pont**), tehát az egyenes egy pontjának a távolsága a síktól megadja az egyenes és a pont távolságát (**2 pont**). Az egyenes egy pontja $(1, -1, 2)$ (**1 pont**), tehát a keresett távolság $\dfrac{|1+1-2-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (**2 pont**).

2. (10+10 pont)

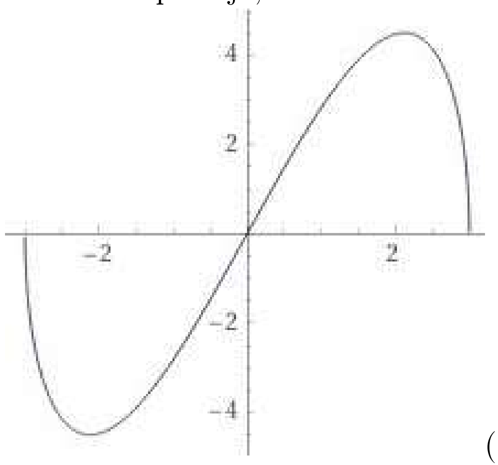
   (a) Adjuk meg a $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$ csúcspontú szabályos háromszög egy lehetséges harmadik csúcsát.

   (b) Konvergens-e a $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2 - 4})$ sorozat? Ha igen, adjuk meg a határértékét!

Megoldás. *a*) $z_3 = z_1 + (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})(z_2 - z_1) = 1 + i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - 2i) =$
$= \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(4+3+3 pont)**
vagy $z_3 = z_2 + (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})(z_1 - z_2) = 2 - i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + 2i) =$
$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
b) $a_n = \dfrac{n^2(n^2 - (n^2 - 4))}{n + \sqrt{n^2 - 4}} = \dfrac{4n}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}} > 2n \to \infty$, (**3+3+3 pont**) tehát a sorozat divergens (**1 pont**).

3. (20 pont) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk az $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ függvényt.

Megoldás. I. $D_f = [-3, 3]$ (**1 pont**)
II. $f(0) = 0$, $f(x) = 0$, ha $x = \pm 3$ (**1 pont**)
III. így a függvény nem periodikus, de $f(-x) = -x\sqrt{9-(-x)^2} = -f(x)$, így a függvény páratlan (**2 pont**)
IV. $\lim\limits_{x \to \pm 3} f(x) = 0$ (**1 pont**).
V. Monotonitás: $f'(x) = \sqrt{9-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ (**3 pont**) zérushelye $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ (**1 pont**), tehát f monoton csökken a $\left(-3, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ és $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 3\right)$ intervallumokon, és monoton nő az $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ intervallumon (**2 pont**).
VI. konvexitásvizsgálat: $f''(x) = \dfrac{-4x\sqrt{9-x^2} + \frac{x(9-2x^2)}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{-4x(9-x^2) + x(9-2x^2)}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{2x^3 - 27x}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ (**3 pont**) értelmezési tartományon belüli zérushelye 0 (**1 pont**), tehát f konkáv a $(-3, 0)$ és konvex a $(0, 3)$ intervallumon (**2 pont**).
VII. Nincs aszimptotája, hiszen nincs értelmezve a $\pm\infty$ közelében (**1 pont**)



VIII. (**1 pont**)
IX. $R_f = \left(-f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right), f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (**1 pont**)

4. (20 pont) Mennyi $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}^2(3x-6)}\,dx$?

Megoldás. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c$ (**5 pont**)

így $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(3x-6)} dx = \frac{1}{3}\operatorname{th}(3x-6) + c$ (**5 pont**)

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}^2(3x-6)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{th}(3x-6)\right]_2^\omega = \frac{1}{3}$ (**5+5 pont**)

5. (20 pont) A globális papírhiány miatt újragondolják a literes tejesdobozok alakját: az egyik él továbbra is 8 cm, hogy elférjen a hűtőszekrény ajtaján található polcon. Hogyan határozzák meg a többi él hosszát, hogy a téglatest felszíne (és így a szükséges csomagolás mennyisége) a lehető legkisebb legyen?

Megoldás. Ha a doboz másik két éle x és y, akkor $0,8xy = 1$, így $y = \frac{1{,}25}{x}$ (**4 pont**), és a doboz felszíne $A(x) = 2(0,8x + \frac{1}{x} + 1,25)$ (**4 pont**). $A'(x) = 2(0,8 - \frac{1}{x^2}) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{1,25}$ (**4 pont**), és A csökken a $\left(0, \sqrt{1,25}\right)$ intervallumon és nő a $\left(\sqrt{1,25}, \infty\right)$ intervallumon (**4 pont**), így akkor minimális, ha $x = y = \sqrt{1,25}$ dm. (**4 pont**)

IMSC. (8 pont) Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})?$$

Megoldás Mindkét függvény értelmezési tartománya $[1,\infty)$ (**2 pont**).

$(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (**1 pont**),

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(\sqrt{x^2-1}+x)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \textbf{(3 pont)},$$

és $\operatorname{arch} 1 = 0 = \ln(1+\sqrt{1^2-1})$ (**1 pont**), tehát a két függvény minden $x \in [1,\infty)$ esetén megegyezik.