INFOANALÍZIS2 3.ZH

2016 december 02.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy hol és milyen lokális szélsőértékei vannak az

$$f(x,y) := 4xy + x^4 + y^4$$

függvénynek.

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x,y) := xy(12-x-y)$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyét a $[0,8]\times[0,8]$ négyzeten.

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\, dx\, dy.$$

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin\sqrt{x^3}\, dx\, dy.$$

5. Feladat. Adjuk meg az $f(x,y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ függvény kettős integrálját az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott T tartományon

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\geq 1 \\ x^2+y^2 &\leq 9 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy hol és milyen lokális szélsőértékei vannak az

$$f(x,y) := 4xy + x^4 + y^4$$

függvénynek.

Megoldás. A parciális deriváltak $\boxed{\color{red}\mathbf{2p}}$

$$f'_x(x,y) = 4y + 4x^3$$
$$f'_y(x,y) = 4x + 4y^3.$$

A

$$4y + 4x^3 = 0$$
$$4x + 4y^3 = 0$$

egyenletrendszer megoldása $\boxed{\color{red}\mathbf{3p}}$

$$x'_1 = 0,\ y'_1 = 0,$$
$$x'_2 = 1,\ y'_2 = -1,$$
$$x'_3 = -1,\ y'_3 = 1.$$

A Hesse mátrix $\boxed{\color{red}\mathbf{2p}}$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mivel

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

indefinit, nincs szélsőérték. $\boxed{\color{red}\mathbf{1p}}$

(b) Mivel

$$\det H(1,-1) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$$

pozitív definit, lokális minimuma van. $\boxed{\color{red}\mathbf{1p}}$

(c) Mivel

$$\det H(1,-1) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$$

pozitív definit, lokális minimuma van. $\boxed{\color{red}\mathbf{1p}}$ ■

---

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x,y) := xy(12-x-y)$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyét a $[0,8] \times [0,8]$ négyzeten.

Megoldás. (1) A tartomány belsejében: $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$f'_x(x,y) = y(12-x-y) + xy(-1)$$
$$f'_y(x.y) = x(12-x-y) + xy(-1).$$

A

$$12 - 2x - y = 0$$
$$12 - x - 2y = 0$$

egyenletrendszer megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$x'_1 = 4,\ y'_1 = 4.$$

(2) $x = 8,\ 0 \leq y \leq 8$.
Ekkor $f(8,y) = 32y - 8y^2$. Így kapjuk $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$x'_2 = 8,\ y'_2 = 0$$
$$x'_3 = 8,\ y'_3 = 2$$
$$x'_4 = 8,\ y'_4 = 8.$$

(3) $y = 8,\ 0 \leq x \leq 8$.
Ekkor $f(x,8) = 32x - 8x^2$. Így kapjuk $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y'_5 = 8,\ x'_5 = 0$$
$$y'_6 = 8,\ x'_6 = 2$$
$$y'_7 = 8,\ x'_7 = 8.$$

(4) $x = 0$ vagy $y = 0$. Ekkor az f függvény konstans, 0. $\boxed{\mathbf{1p}}$
Előzőek alapján, $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(4,4)\ \text{max. hely, értéke}\ f(4,4) = 64.$$
$$(8,8)\ \text{min. hely, értéke}\ f(8,8) = -256. \quad \blacksquare$$

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2} \, dx \, dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\textbf{1p}}$. Az e^{x^2} függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető primitívfüggvénye, következésképp $e^{(x-1)^2}$-nek sincs. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\textbf{1p}}$,

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2} \, dx \, dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_1^5 \int_0^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^2} \, dy \, dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_1^5 \left[\frac{y^2}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_1^5 \frac{x-1}{2} e^{(x-1)^2} dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left[\frac{1}{4} e^{(x-1)^2} \right]_1^5 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1). \quad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin \sqrt{x^3} \, dx \, dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\textbf{1p}}$. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\textbf{1p}}$,

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin \sqrt{x^3} \, dx \, dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x^3} \, dy \, dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left[y \sin \sqrt{x^3} \right]_0^{\sqrt{x}}$$

$$\overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x} \sin x^{\frac{3}{2}} dx \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \left[-\frac{2}{3} \cos x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} = \frac{4}{3}. \quad \blacksquare$$

---

5. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ függvény kettős integrálját az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott T tartományon

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 9 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

Megoldás. Polárkoordinátákra térünk át:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \boxed{\textbf{2p}} \quad 1 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.\boxed{\textbf{2p}}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_T \arctan\left(\frac{y}{x}\right) d\lambda_2 &\overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_{T'} \arctan\left(\frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)}\right) \cdot r\, dr\, d\varphi \\
&\overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^3 \arctan(\tan(\varphi)) r\, dr\, d\varphi \\
&\overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^3 \varphi r\, dr\, d\varphi \\
&\overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi\right)\left(\int_1^3 r\, dr\right) \\
&\overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} 2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$