1. feladat (10 pont)

Mit értünk azon, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$?

Definíció szerint igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^5 - 2n^4 + 5n^2 + 10^4}{2n^5 - n^4 + 3n^2} = 2 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$:

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:
$|a_n - 2| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 2

$$|a_n - A| = \left| \frac{4n^5 - 2n^4 + 5n^2 + 10^4}{2n^5 - n^4 + 3n^2} - 2 \right| =$$

$$= \left| \frac{4n^5 - 2n^4 + 5n^2 + 10^4 - 2(2n^5 - n^4 + 3n^2)}{2n^5 - n^4 + 3n^2} \right| = \left| \frac{10^4 - n^2}{\underbrace{2n^5 - n^4 + 3n^2}_{n^4(2n-1)>0}} \right| \underset{2}{=}$$

$$\underset{n \geq 100}{=} \frac{n^2 - 10^4}{2n^5 - n^4 + 3n^2} \leq \frac{n^2 - 0}{2n^5 - n^5 + 0} = \frac{1}{n^3} < \varepsilon$$

2

$$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}, \quad N(\varepsilon) \geq \max\left\{100, \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right]\right\}$$ 4

2. feladat (23 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \sqrt[n]{8\, n^7\, 2^{3n} \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{4n^2}}$ b) $b_n = \dfrac{(2n+1)^4}{2n^4 + 7}$

c) $c_n = \left(\dfrac{n^2 - 3}{n^2 - 2}\right)^{2n^2}$. d) $d_n = \left(\dfrac{n^2 - 3}{n^2 - 2}\right)^{2n^3}$

a.) $a_n = \sqrt[n]{8}\, (\sqrt[n]{n})^7 \cdot 8 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{2n}\right)^{4n}}_{} \to 1 \cdot 1^7 \cdot 8 \cdot e^{-2} \left(= \frac{8}{e^2}\right)$

$\boxed{6}$

$$\left(\left(1 + \frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right)^2 \to (e^{-1})^2 = e^{-2}$$

b.) $\boxed{4}$ $b_n = \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{=1} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4}{2+\frac{7}{n^4}} \longrightarrow \frac{(2+0)^4}{2+0} = 8$

c.) $\boxed{6}$ $c_n = \left(\frac{\left(1+\frac{-3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{e^{-3}}{e^{-2}}\right)^2 = \frac{1}{e^2}$

d.) $\boxed{7}$ $d_n = c_n^n$ és $c_n \to \frac{1}{e^2}$ (c.) alapján)

$\Rightarrow \exists N_1: \quad 0 < \frac{1}{e^2} - 0{,}1 < c_n < \frac{1}{e^2} + 0{,}1 < 1$, ha $n > N_1$

$\Rightarrow \quad 0 \leftarrow 0 < d_n = c_n^n < \left(\frac{1}{e^2} + 0{,}1\right)^n \to 0$

$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \quad d_n \to 0$

3. feladat (20 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \sqrt{4n^2+2n} + (-1)^n \sqrt{4n^2+6n+3}$$

$$b_n = \sqrt[n]{\frac{6n^2+n}{n^2+2}}$$

a_n:

n páros: $a_n = \sqrt{4n^2+2n} + \sqrt{4n^2+6n+3} \longrightarrow \infty$ 3

$\infty + \infty$ alakú

n páratlan:

$a_n = \left(\sqrt{4n^2+2n} - \sqrt{4n^2+6n+3}\right) \frac{\sqrt{4n^2+2n} + \sqrt{4n^2+6n+3}}{\sqrt{4n^2+2n} + \sqrt{4n^2+6n+3}} =$ 2

$= \frac{4n^2+2n-(4n^2+6n+3)}{\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2+6n+3}} = \frac{-4n-3}{\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2+6n+3}} =$ 2

$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=1} \frac{-4-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}} + \sqrt{4+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-4}{2+2} = -1$ 3

$\overline{\lim}\, a_n = \infty \;;\; \underline{\lim}\, a_n = -1$ 2

an1z1 12030812.

$$\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{\frac{6n^2}{n^2+2n^2}} \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{6n^2+n}{n^2+2}} \leq \sqrt[n]{\frac{6n^2+n^2}{2}} = \sqrt[n]{\frac{7}{2}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$$

$\sqrt[n]{2} \to 1$, $\sqrt[n]{\frac{7}{2}} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\xRightarrow{\text{rendőrelv}}$ $b_n \to 1$ (6)

$$\overline{\lim}\, b_n = \underline{\lim}\, b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \quad (2)$$

4. feladat (16 pont)

Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$$a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n + 4}\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 2$$

$$(a_n) = (2\,,\ 3.16\,,\ 3.67\,, \cdots)$$

Ha (a_n) konvergens:

$A = \sqrt{3A+4} \Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0 \Rightarrow A = 4$ vagy $A = -1$ (2)

Sejtés: (a_n) (szigorúan) monoton nő.
Bizonyítás: teljes indukcióval

1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül
2.) Tfh. $a_{n-1} < a_n$
3.) Igaz-e:
$\sqrt{3a_{n-1}+4} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4}$

2.) miatt $a_{n-1} < a_n \quad |\cdot 3 > 0$

$\Rightarrow 3a_{n-1} < 3a_n \quad |+4$

$\Rightarrow 0 \leq 3a_{n-1}+4 < 3a_n+4$

$\Rightarrow \sqrt{3a_{n-1}+4} = a_n < \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1}$ (5)

Sejtés: $a_n < 4$
Bizonyítás: teljes indukcióval

1.) $a_i < 4$ teljesül, ha $i = 1, 2, 3$
2.) Tfh. $a_n < 4$
3.) Igaz-e $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} \overset{?}{<} 4$

2.) miatt $a_n < 4 \quad |\cdot 3$

$\Rightarrow 3a_n < 12 \quad |+4$

$\Rightarrow 0 \leq 3a_n + 4 < 16$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1} < \sqrt{16} = 4 \qquad 5$$

T (a_n) monoton nő és felülről korlátos $\Rightarrow (a_n)$ konv. 2

Mivel $a_1 = 2$ és (a_n) monoton nő $A \neq -1$, tehát

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = 4 \qquad 2$$

5. feladat (13 pont)

1. Mondja ki a numerikus sorokra vonatkozó minoráns kritériumot!
2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{4n^3-n^2+3n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{2n^2\cdot 4^n + 2^n}$

1.) T Ha $0 \le d_n \le a_n$ $n \ge N_1$-re és $\sum^{\infty} d_n$ divergens

$$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ divergens} \qquad 3$$

2.) a) $\boxed{5}$ $a_n = \dfrac{n^2+7}{4n^3-n^2+3n} \ge \dfrac{n^2+0}{4n^3-0+3n^3} = \dfrac{1}{7}\,\dfrac{1}{n}$;

$\dfrac{1}{7}\sum^{\infty}\dfrac{1}{n}$ div. (harmonikus sor) $\xRightarrow[\text{kr.}]{\text{minoráns}} \sum a_n$ divergens

b.) $\boxed{5}$ $0 < b_n = \dfrac{4^n}{2n^2 4^n + 2^n} \le \dfrac{4^n}{2n^2 4^n + 0} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$

$\dfrac{1}{2}\sum^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ konvergens $(\alpha = 2 > 1) \xRightarrow[\text{kr.}]{\text{majoráns}} \sum^{\infty} b_n$ konvergens

6. feladat (18 pont)

Abszolút konvergens-e, illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n+2}{n^2+1}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$$

$$c_n = \frac{n+2}{n^2+1} \geq \frac{n+0}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \;;\quad \frac{1}{2}\sum^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergens}$$

(harmonikus sor)

$\Rightarrow \sum^{\infty} c_n$ div., tehát a sor nem abszolút konv. 5

Leibniz sor-e?

$$c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0 \quad 2$$

c_n monoton csökkenő-e?

$$c_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\leq} \frac{n+2}{n^2+1} = c_n$$

$$(n+3)(n^2+1) \overset{?}{\leq} (n+2)(n^2+2n+2)$$

$$n^3+n+3n^2+3 \overset{?}{\leq} n^3+2n^2+2n+2n^2+4n+4$$

$$0 \overset{?}{\leq} n^2+5n+1 \quad \text{Ez } \forall\, n\text{-re igaz.}$$

Ezért $c_{n+1} \leq c_n$. 5

Mivel $c_n \searrow 0$, ezért Leibniz sor, tehát konv. 1

Így a sor feltételesen konvergens. 1

$S \approx S_{100}$. Leibniz sorról van szó, ezért

$$|H| \doteq |S - S_{100}| \leq c_{101} = \frac{103}{101^2+1} \quad 4$$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

---

7. feladat (13 pont)

a) $a_n = \dfrac{2^n + (-4)^n}{8 + 7^{n+1}}$, $\qquad b_n = \dfrac{2^n + 3^{2n}}{8 + 9^{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$

b) Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

a.)

$$a_n = \frac{2^n + (-4)^n}{8 + 7 \cdot 7^n} = \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(-\frac{4}{7}\right)^n}{8\left(\frac{1}{7}\right)^n + 7} \to \frac{0+0}{0+7} = 0 \quad 5$$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a| < 1$.

$$b_n = \frac{2^n + 9^n}{8 + \frac{1}{9}\cdot 9^n} = \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n + 1}{8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{9}} \to \frac{0+1}{0+\frac{1}{9}} = 9 \quad 5$$

b.) $\sum\limits^{\infty} b_n$ divergens, mert $b_n \not\to 0$, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

8. feladat (7 pont)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} + 2^{2n-1}}{5^n} = ? \qquad \text{(Határozza meg a sor összegét!)}$$

A sor 2 konvergens geometriai sor összege, így konvergens és

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2\,(-2)^n + \frac{1}{2}\,4^n}{5^n} = -2\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad 1 =$$

$q_1 = -\frac{2}{5},\ |q_1| < 1$ 1 $\qquad q_2 = \frac{4}{5},\ |q_2| < 1$ 1

$$= -2\,\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1-\frac{4}{5}}$$

2 $\qquad$ 2