ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI β **változat**

2009. okt. 13
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (~~17~~ 14 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5\,, \qquad \text{illetve} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-6n^2-4n+25}{2n^2+n-5} = -3 \qquad (N(\varepsilon)=?)$$

a) $\boxed{6}$

D1 $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$: $|a_n - 5| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$
$(\varepsilon \in \mathbb{R},\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ 3

D2 $\forall\, M < 0$-hoz $\exists\, N(M)$: $a_n < M$, ha $n > N(M)$
$(M \in \mathbb{R},\ N(M) \in \mathbb{N})$ 3

b) $\boxed{8}$

$$|a_n - A| = \left|\frac{-6n^2-4n+25}{2n^2+n-5} + 3\right| = \left|\frac{-6n^2-4n+25+3(2n^2+n-5)}{2n^2+n-5}\right| = \quad 3$$

$$= \left|\frac{-n+10}{2n^2+n-5}\right| \underset{n>10}{=} \frac{n-10}{2n^2+\underbrace{n-5}_{>0}} < \frac{n}{2n^2+0} = \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad 1$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} \implies N(\varepsilon) = \max\left\{\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right], 10\right\} \quad 4$$

2. feladat (~~14~~ 17 pont)

a) Mit tud mondani az $a_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$ sorozat viselkedéséről?

b) Keresse meg a következő sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2+8n+7}\,, \qquad b_n = \frac{n^4\,4^n + 5^n}{3^{3n+1} + 4}$$

a) $\boxed{4}$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1 \\ 1, & \text{ha } a = 1 \\ \infty, & \text{ha } a > 1 \\ \text{osc. div.}, & \text{ha } a \le -1 \end{cases}$$

b.)

$$a_n = \left(\sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2+8n+7}\right)\frac{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}} = \quad 2$$

$$= \frac{4n^2+3n-(4n^2+8n+7)}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}} = \frac{-5n-7}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}} =$$

2

$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1} \frac{-5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-5-0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0+0}} = -\frac{5}{4}$$

4

$$b_n = \frac{n^4 4^n + 5^n}{3 \cdot 27^n + 4} = \underbrace{\frac{5^n}{27^n}}_{=\left(\frac{5}{27}\right)^n \to 0} \frac{n^4\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1}{3 + 4\left(\frac{1}{27}\right)^n} \to 0 \cdot \frac{0+1}{3+0} = 0$$

1 2 2

Felhasználtuk, hogy $a^n \to 0$, ha $|a|<1$
és $n^k a^n \to 0$, ha $|a|<1$ és $k \in \mathbb{N}^+$

3. feladat (14 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatot!

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 2$$

$$(a_n) = (2\,,\ 3.16\,,\ 3.67\,, \cdots)$$

Ha (a_n) konvergens: $A = \sqrt{3A+4} \Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0$
$\Rightarrow A = -1$ és $A = 4$ jöhet szóba. De $a_n > 0 \Rightarrow A = 4$ lehet csak

2

Sejtés: (a_n) mon. növekedően tart 4-hez.

Belátjuk, hogy $a_n < 4$:

B T.I. 1.) $a_i < 4$, ha $i = 1, 2, 3$
2.) Tfh. $a_n < 4$
3.) Igaz-e, hogy $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} < 4$

2.) miatt $a_n < 4 \quad | \cdot 3$
$3a_n < 12 \quad | + 4$
$0 < 3a_n + 4 < 16 \quad | \sqrt{\ }$
$a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} < 4$ Tehát az állítás igaz

4

Állítás: (a_n) monoton nő:

B T.I.

1.) $a_1 \le a_2 \le a_3$

2.) Tfh. $a_{n-1} \le a_n$

3.) Igaz-e? $a_n = \sqrt{3a_{n-1}+4} \overset{?}{\le} \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1}$

2.) miatt $a_{n-1} \le a_n \quad |\cdot 3$

$3a_{n-1} \le 3a_n \quad |+4$

$0 < 3a_{n-1}+4 \le 3a_n+4 \quad |\sqrt{\ }$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1}+4} \le \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1}$ igaz 5

Tehát (a_n) monoton nő és felülről korlátos

$\Rightarrow (a_n)$ konvergens. 2

Így $\lim_{n\to\infty} a_n = 4.$ 1

4. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint a limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \frac{(-3)^n + 2^{2n+1}}{4^{n-1} + 7}, \qquad b_n = a_n \cdot \cos(n\pi)$$

$$a_n = \frac{(-3)^n + 2\cdot 4^n}{\frac{1}{4}\cdot 4^n + 7} = \underbrace{\frac{4^n}{4^n}}_{=1} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 2}{\frac{1}{4} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n} \to \frac{0+2}{\frac{1}{4}+0} = 8$$ 4

$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = 8$ 2

$b_n = (-1)^n a_n \Rightarrow$ $b_n = a_n \to 8$, ha n ps 1

$b_n = -a_n \to -8$, ha n ptl 1

$\overline{\lim}\, a_n = 8$, $\underline{\lim}\, a_n = -8$; $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$ 2

5. feladat (10 pont)

a) Mit tud a $\sum_{k=0}^{\infty} a\,q^k$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ sor viselkedéséről?

Konvergencia esetén adja meg a sor összegét!

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} + (-3)^{n-1}}{10^n} = ? \qquad \text{(Adja meg a sor összegét!)}$$

an1z1091013/3.

a.) $\sum_{k=0}^{\infty} a q^k = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ \text{divergens} & \text{egyébként} \end{cases}$ 3

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 9^n + \frac{-1}{3}(-3)^n}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{10}\right)^n =$ 2

$= 3 \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}} - \frac{1}{3} \frac{-\frac{3}{10}}{1-(-\frac{3}{10})}$ 3

$q_1 = \frac{9}{10} \quad |q_1|<1$ 1 $\quad q_2 = -\frac{3}{10} \quad |q_2|<1$ 1

(Két konvergens geom. sor összegéről van szó.)

6. feladat (18 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{4n^4-n^2+2}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n^2+6}{3n^2+1}\right)^{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+3)^2}$

a.) $\sum^{\infty} a_n$: $\quad a_n = \frac{n^2+5}{4n^4-n^2+2} \le \frac{n^2+5n^2}{4n^4-n^4+0} = \frac{2}{n^2}$

$\boxed{6}$

$2 \sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $(\alpha = 2 > 1) \underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ konv.

b.) $\sum^{\infty} b_n$:

$\boxed{7}$ $\quad b_n = \frac{\left(1+\frac{6/3}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow \frac{e^{6/3}}{e^{1/3}} = e^{5/3}$

c.) $\sum^{\infty} c_n$:

$\boxed{5}$ $\quad c_n > \frac{2n+0}{(n+3n)^2} = \frac{1}{8}\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{8}\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div. (harm. so

$\underset{\text{min krit.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} c_n$ div.

an1z1091013/4.

7. feladat (17 pont)

Abszolút konvergens-e vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+1}}{n\,4^n + 1}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$\sum^{\infty} (-1)^n c_n$

$c_n = \frac{4 \cdot 4^n}{n \cdot 4^n + 1} > \frac{4 \cdot 4^n}{n \cdot 4^n} = \frac{4}{n}$; $4 \sum \frac{1}{n}$ div.

Tehát a sor nem abszolút konvergens. 5

Leibniz sor-e?

$c_n = \frac{4}{n + \left(\frac{1}{4}\right)^n} \to 0$ 2

$n \to \infty$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$

Monoton csökkenő-e?

$$c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$$

$$\frac{4 \cdot 4^{n+1}}{(n+1)\, 4^{n+1} + 1} \overset{?}{\leq} \frac{4 \cdot 4^n}{n\, 4^n + 1}$$

$$4(n 4^n + 1) \overset{?}{\leq} 4(n+1)\, 4^n + 1$$

$$\frac{3}{4} \overset{?}{\leq} 4^n \quad \text{Ez } \forall\, n\text{-re teljesül}$$ 4

Tehát a sor Leibniz sor, így konvergens 2

Így a sor feltételesen konv. 1

$s \approx s_{99}$

$|H| \leq c_{100} = \frac{4^{101}}{100 \cdot 4^{100} + 1}$ 3

an1z1091013/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (12 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^{7n}$ b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{8n^2+1}{n^2+8}}$

a.) $a_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\right)^7 \longrightarrow \left(\dfrac{e^1}{e^4}\right)^7 = e^{-21}$ 5

b.) $\sqrt[n]{\frac{1}{9}}\,\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2+8n^2}} \le b_n = \sqrt[n]{\dfrac{8n^2+1}{n^2+8}} < \sqrt[n]{\dfrac{8n^2+n^2}{8}} = \sqrt[n]{\dfrac{9}{8}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$

$\Longrightarrow b_n \longrightarrow 1$ 7

9. feladat (8 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{8+(\sqrt{7})^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{8+\sqrt[n]{7}}$

a.) $\boxed{5}$ $\sum\limits^{\infty} a_n$ $|a_n| = \dfrac{2}{8+\underbrace{(\sqrt{7})^n}_{\to\infty}} \to 0$ és $|a_n|$ monoton csökken

Leibniz sorról van ~~szó~~, így konv.

Vagy: $|a_n| < \dfrac{2}{0+(\sqrt{7})^n} = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^n$; $2\sum\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^n$ konv.

geom. sor $\left(0 < q = \frac{1}{\sqrt{7}} < 1\right)$

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty}|a_n|$ konv., tehát a sor abszolút konv.

$\Rightarrow$ a sor konv.

b.) $\boxed{3}$ $\sum\limits^{\infty} b_n$ $|b_n| = \dfrac{2}{8+\sqrt[n]{7}} \to \dfrac{2}{8+1} = \dfrac{2}{9} \ne 0$

Tehát $|b_n| \not\to 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$. Így a sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

an1z1091013/6.