Többváltozós analízis

Farkas Barnabás

Előszó

A jegyzet elsősorban a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem villamosmérnök hallgatóinak készült, második féléves matematika tanulmányaik (A2) többváltozós analízis fejezeteit tartalmazza egy kicsit kibővítve. A villamosmérnök hallgatókon kívül bármely más mérnöki vagy egyéb műszaki szakos hallgatóknak is segítséget nyújthat a témában.

A témához kapcsolódó feladatok közül a legfontosabb típusokból több kidolgozott példát is tartalmaz a jegyzet, ezzel igyekezvén segítséget nyújtani a ZH-kra illetve vizsgákra való felkészülésben.

Budapest, 2008 05. 23. Farkas Barnabás

Tartalomjegyzék

1. Topológia

Norma és távolság

A valós számokon ($\mathbb{R}$), a síkon ($\mathbb{R}^2$) és a háromdimenziós térben ($\mathbb{R}^3$) megismert szemléletes fogalmainkat szeretnénk általánosítani magasabb dimenzióban.

Minden $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$-ra legyen

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

a valós szám n-esek halmaza.

A skalárral szorzással és vektorösszeadással $\mathbb{R}^n$ egy vektortér: $\lambda \in \mathbb{R}$ és $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

$\mathbb{R}^n$ standard bázisa: $\underline{e}^1 = (1, 0, \dots, 0), \underline{e}^2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}^n = (0, \dots, 0, 1)$.

1.1. Definíció. Egy $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor *hossza* vagy *normája:*

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

1.2. Tétel. *A* $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *norma minden* $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ *esetén eleget tesz a következőknek:*

(0) $\|\underline{x}\| \geq 0$, $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} = (0, \dots, 0)$,

(1) $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$,

(2) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Bizonyítás. (0) és (1) triviális a definícióból.

(2): Legyen $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Azt kell belátnunk, hogy

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

Ezt négyzetre emelve ekvivalens kifejezést kapunk:

$$(x_1+y_1)^2+\dots+(x_n+y_n)^2 \leq x_1^2+\dots+x_n^2+2\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}+y_1^2+\dots+y_n^2.$$

A baloldalon elvégezzük a négyzetreemelést és kivonunk minden négyzetes tagot, továbbá egyszerűsítünk 2-vel:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Elég ezt belátnunk minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$-re.

Ez ekvivalens a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséggel* (CBS):

Minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$-re

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Tekintsük a következő $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomot:

$$p(t) = \sum_{i=1}^n (x_i + t y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Ennek legfeljebb egy gyöke van (nem negatív számok összege), így a diszkriminánsa kisebb-egyenlő 0-nál:

$$\Big(2\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big) \le 0,$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big),$$

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Most már értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-beli pontok távolságát.

1.3. Definíció. $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ és $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *távolsága:*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Speciálisan egy $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ pont normája egyenlő a $\underline{0}$-tól való távolságával: $\|\underline{x}\| = d(\underline{0}, \underline{x})$.

1.4. Tétel. *A $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény minden $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ esetén kielégíti a következő azonosságokat:*

(d0) $d(\underline{x}, \underline{y}) \ge 0$, $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$,

(d1) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$,

(d2) $d(\underline{x}, \underline{z}) \le d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z})$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Bizonyítás. (d0) és (d1) triviális a definíciókból.
(d2): Használjuk a normára vonatkozó (2) azonosságot

$$d(\underline{x}, \underline{z}) = \|\underline{z} - \underline{x}\| = \|(\underline{y} - \underline{x}) + (\underline{z} - \underline{y})\| \le \|\underline{y} - \underline{x}\| + \|\underline{z} - \underline{y}\| = d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}).$$

□

Nyílt és zárt halmazok

1.5. Definíció. Adott $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ esetén az $\underline{a}$ *pont* ε *sugarú környezete:*

$$S(\underline{a}, \varepsilon) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{a}, \underline{x}) < \varepsilon\},$$

az $\underline{a}$ *pont* ε *sugarú pontozott környezete:*

$$\dot{S}(\underline{a}, \varepsilon) = S(\underline{a}, \varepsilon) \setminus \{\underline{a}\},$$

és végül az $\underline{a}$ *pont körüli* ε *sugarú zárt gömb:*

$$B(\underline{a}, \varepsilon) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{a}, \underline{x}) \leq \varepsilon\}.$$

Például $n = 1$ esetén, ha $a \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$, akkor $S(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ és $B(a, \varepsilon) = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

1.6. Definíció. Egy $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *nyílt*, ha minden $\underline{a} \in U$-hoz létezik $\varepsilon > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq U$.

Speciálisan $\emptyset$ és $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazok.

1.7. Állítás. *Minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-re és $\varepsilon > 0$-ra az $S(\underline{a}, \varepsilon)$ és $\dot{S}(\underline{a}, \varepsilon)$ halmazok nyíltak.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{b} \in S(\underline{a}, \varepsilon)$ és $\varepsilon' = \varepsilon - d(\underline{a}, \underline{b}) \leq \varepsilon$. Ekkor $S(\underline{b}, \varepsilon') \subseteq S(\underline{a}, \varepsilon)$, mert ha $\underline{x} \in S(\underline{b}, \varepsilon')$, akkor

$$d(\underline{a}, \underline{x}) \leq d(\underline{a}, \underline{b}) + d(\underline{b}, \underline{x}) < d(\underline{a}, \underline{b}) + \varepsilon - d(\underline{a}, \underline{b}) = \varepsilon,$$

így $\underline{x} \in S(\underline{a}, \varepsilon)$. A másik állítás bizonyítása teljesen hasonló. $\square$

Az $S(\underline{a}, \varepsilon)$ alakú nyílt halmazokat *nyílt gömböknek* nevezzük. A nyíltság definíciója szerint minden nyílt halmaz előáll nyílt gömbök uniójaként.

1.8. Állítás. *Tetszőleges sok nyílt halmaz uniója nyílt. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*

Bizonyítás. Legyen $\{U_i : i \in I\}$ nyílt halmazok egy rendszere és $\underline{a} \in \bigcup_{i \in I} U_i$ tetszőleges. Ekkor létezik $i \in I$, amire $\underline{a} \in U_i$. Felhasználva, hogy U_i nyílt létezik $\varepsilon > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Legyenek $U_1, \ldots, U_k$ nyílt halmazok ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) és $\underline{a} \in \bigcap_{i=1}^k U_i$ tetszőleges. Ekkor minden i-re létezik $\varepsilon_i > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Legyen ε a legkisebb ε_i: $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq k\} > 0$. Ekkor minden i-re $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq S(\underline{a}, \varepsilon_i) \subseteq U_i$, így $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_i$. $\square$

Az állítás végtelen sok nyílt halmaz metszetére nem igaz: $\bigcap_{n=1}^\infty S(\underline{a}, \frac{1}{n}) = \{\underline{a}\}$.

1.9. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha minden $1 \leq i \leq n$-re $(a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, akkor a

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in (a_i, b_i)\}$$

halmaz nyílt.

1.10. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-re és $\varepsilon > 0$-ra létezik $I \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt intervallum, hogy

$$I^n = \bigtimes_{i=1}^{n} I \subseteq S(\underline{a}, \varepsilon).$$

1.11. Definíció. Egy $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaznak egy $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ *belső pontja*, ha lézetik $\varepsilon > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq H$. A H halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\mathrm{int}(H)$.

Világos, hogy minden $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra $\mathrm{int}(H) \subseteq H$ és H pontosan akkor nyílt, ha $\mathrm{int}(H) = H$.

1.12. Állítás. *Minden $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra $\mathrm{int}(H)$ a legbővebb nyílt halmaz, ami része H-nak.*

Bizonyítás. Ha $\underline{a} \in \mathrm{int}(H)$, akkor valamely $\varepsilon > 0$-val $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq H$. Mivel $S(\underline{a}, \varepsilon)$ nyílt, ezért minden $\underline{b} \in S(\underline{a}, \varepsilon)$-hoz létezik $\varepsilon' > 0$, hogy $S(\underline{b}, \varepsilon') \subseteq S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq H$, vagyis $\underline{b} \in \mathrm{int}(H)$. Igy $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq \mathrm{int}(H)$, tehát $\mathrm{int}(H)$ nyílt halmaz.

Ha $U \subseteq H$ nyílt, akkor minden $\underline{a} \in U$-hoz létezik $\varepsilon > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq U \subseteq H$, vagyis $\underline{a} \in \mathrm{int}(H)$, ezért $U \subseteq \mathrm{int}(H)$. Tehát $\mathrm{int}(H)$ maximális nyílt része H-nak. $\square$

1.13. Definíció. Egy $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaznak egy $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$

- *torlódási pontja*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$,
- *határpontja*, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$S(\underline{c}, \varepsilon) \cap H \neq \emptyset \ \text{ és } \ S(\underline{c}, \varepsilon) \backslash H \neq \emptyset.$$

A H halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje H', határpontjainak halmazát pedig ∂H.

A torlódási pontok $\mathbb{R}^n$-ben tükrözik a szó szemléletes jelentését:

1.14. Állítás. *Tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra és $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$-re $\underline{c}$ pontosan akkor torlódási pontja H-nak, ha $\underline{c}$ minden környezete végtelen sok H-beli pontot tartalmaz. Vagyis*

$$\underline{c} \in H' \iff \forall\, \varepsilon > 0\ |S(\underline{c}, \varepsilon) \cap H| = \infty.$$

Bizonyítás. Ha minden $\varepsilon > 0$-ra $S(\underline{c}, \varepsilon) \cap H$ végtelen, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra $S(\underline{c}, \varepsilon)$ tartalmaz $\underline{c}$-től különböző H-beli pontot, jelölésben $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$, így $\underline{c}$ torlódási pontja H-nak.

Fordítva: Legyen $\underline{c} \in H'$ torlódási pontja H-nak. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\varepsilon > 0$, amire $S(\underline{c}, \varepsilon) \cap H$ véges, ekkor $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H$ is véges.

Ha $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H = \emptyset$, akkor $\underline{c}$ nem torlódási pontja H-nak, ellentmondás.

Ha $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H = \{\underline{h}_1, \ldots, \underline{h}_k\}$, akkor legyen $\varepsilon = \min\{d(\underline{c}, \underline{h}_1), \ldots, d(\underline{c}, \underline{h}_k)\} > 0$. Ekkor $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap H = \emptyset$, mert egyik $\underline{h}_i$ sem lehet benne, így $\underline{c}$ nem lehet H torlódási pontja, ellentmondás. $\square$

Lássunk egy-két példát:

1.) $\mathrm{int}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$ és $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$.

2.) $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset' = \partial\emptyset = \emptyset$.

3.) $\mathrm{int}(S(\underline{a}, \varepsilon)) = S(\underline{a}, \varepsilon)$, $(S(\underline{a}, \varepsilon))' = B(\underline{a}, \varepsilon)$ és

$$\partial S(\underline{a}, \varepsilon) = B(\underline{a}, \varepsilon) \backslash S(\underline{a}, \varepsilon) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{a}, \underline{x}) = \varepsilon\}.$$

Ezt a halmaz nevezzük az $\underline{a}$ *körüli* ε *sugarú gömbfelületnek.*

4.) $\mathrm{int}(\dot{S}(\underline{a}, \varepsilon)) = \dot{S}(\underline{a}, \varepsilon)$, $(\dot{S}(\underline{a}, \varepsilon))' = B(\underline{a}, \varepsilon)$ és $\partial \dot{S}(\underline{a}, \varepsilon) = B(\underline{a}, \varepsilon) \backslash \dot{S}(\underline{a}, \varepsilon)$.

5.) $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ és $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

6.) $\mathrm{int}(\{\underline{a}\}) = \emptyset$, $\{\underline{a}\}' = \emptyset$ és $\partial\{\underline{a}\} = \{\underline{a}\}$.

A példákból világos, hogy egy halmaz torlódási pontja nem feltétlenül határpontja is, és fordítva, hogy egy halmaz határpontja nem feltétlenül torlódási pontja is a halmaznak.

1.15. Definíció. Egy $F \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *zárt*, ha minden torlódási pontját tartalmazza, vagyis $F' \subseteq F$.

1.16. Állítás. *Egy* $F \subseteq \mathbb{R}^n$ *halmazra a következő állítások ekvivalansek:*

(a) F *zárt,*

(b) $\partial F \subseteq F$*,*

(c) $\mathbb{R}^n \backslash F$ *nyílt.*

Bizonyítás. (a)$\Rightarrow$(b): Legyen $\underline{c} \in \partial F$, vagyis minden $\varepsilon > 0$-ra

$$S(\underline{c}, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset \text{ és } S(\underline{c}, \varepsilon) \backslash F \neq \emptyset.$$

Indirekt tegyük fel, hogy $\underline{c} \notin F$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, tehát $\underline{c} \in F' \subseteq F$, ellentmondás.

(b)$\Rightarrow$(c): Legyen $\underline{c} \in \mathbb{R}^n \backslash F$. Mivel $\underline{c} \notin \partial F$, ezért létezik $\varepsilon > 0$, amire

$$S(\underline{c}, \varepsilon) \cap F = \emptyset \ \textbf{vagy} \ S(\underline{c}, \varepsilon) \backslash F = \emptyset.$$

A második eset nem lehetséges, mivel $\underline{c} \in S(\underline{c}, \varepsilon) \backslash F$, ezért $S(\underline{c}, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Vagyis $S(\underline{c}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash F$, tehát az $\mathbb{R}^n \backslash F$ halmaz nyílt.

(c)$\Rightarrow$(a): Legyen $\underline{c} \in F'$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra $\dot{S}(\underline{c}, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, így $S(\underline{c}, \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{R}^n \backslash F$. Mivel $\mathbb{R}^n \backslash F$ nyílt, ezért $\underline{c} \notin \mathbb{R}^n \backslash F$, tehát $\underline{c} \in F$. □

Az 1.8 Állítás duálisa zárt halmazokra:

1.17. Állítás. *Tetszőleges sok zárt halmaz metszete zárt. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*

1.18. Feladat. Bizonyítsa be az 1.17 Állítást. Mutasson példát végtelen sok zárt halmazra, melyek uniója nem zárt.

1.19. Feladat. Adjon példát $F_k \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres zárt halmazok egy sorozatára, melyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F_{k+1} \subseteq F_k$ és $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$ (elég $\mathbb{R}$-ben vagy $\mathbb{R}^2$-ben).

1.20. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és $F \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt halmazokra az $U \setminus F$ halmaz nyílt és az $F \setminus U$ halmaz zárt.

1.21. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $H \subseteq \mathbb{R}^n$-re a H' és ∂H halmazok zártak továbbá, hogy a $H \cup H' = H \cup \partial H$ halmaz is zárt. Bizonyítsa be, hogy ez legszűkebb H-t tartalmazó zárt halmaz.

1.22. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $H \subseteq \mathbb{R}^n$-re az $\mathrm{int}(H)$, ∂H és a $\mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus H)$ halmazok páronként diszjunktak továbbá, hogy fennáll az

$$\mathrm{int}(H) \cup \partial H \cup \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus H) = \mathbb{R}^n$$

egyenlőség.

2. Sorozatok

Sorozatok konvergenciája

Az egydimenziós esethez hasonlóan, több dimenzióban is az egyik legfontosabb fogalom a sorozatok konvergenciája. Ennek megértése szükséges a függvény határérték és folytonosság megértéséhez is.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért megállapodunk abban, hogy $0 \notin \mathbb{N}$.

2.1. Definíció. Egy $\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ függvényt ($\mathbb{R}^n$-beli) *sorozatnak* nevezünk. A sorozat k. elemére $\underline{a}(k)$ helyett az $\underline{a}_k$ jelölést használjuk.

Egy $\{\underline{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat *részsorozatán* a sorozat egy "ritkítását" értjük. Precízen: egy adott $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényhez definiáljuk az $\{\underline{a}_{k_d}\}_{d\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen:

$$\underline{a}_{k_d} = \underline{a}(k(d)) = \underline{a}_{k(d)},$$

vagyis ennek a sorozatnak a d. eleme az eredeti sorozat $k_d = k(d)$. eleme.

A precíz $\{\underline{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jelölés helyett, ha egy sorozatról beszélünk egyszerűen $\underline{a}_k$-t fogunk írunk. Minden $\underline{a}_k$ sorozat megadható a következő formában:

$$\underline{a}_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n),$$

ahol minden i-re $\{a_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ egy klasszikus valós sorozat. Például

$$\underline{a}_k = \left(k^2 + k! - \sqrt{k}, \frac{k + k^3}{k + \ln(k)}\right)$$

egy $\mathbb{R}^2$-beli sorozat.

2.2. Definíció. Egy $\underline{a}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat *határértéke* vagy *limesze* $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, jelölésben $\lim_{k\to\infty} \underline{a}_k = \underline{a}$ vagy $\underline{a}_k \to \underline{a}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq k_0$-ra $\underline{a}_k \in S(\underline{a}, \varepsilon)$. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\underline{a}_k$ sorozat *konvergens*, különben *divergens.*

Az egydimenziós esethez hasonlóan meggondolható, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.

A gyakorlás kedvéért fogalmazzuk meg a definíciót logikai jelekkel is többféleképpen: $\underline{a}_k \to \underline{a}$ pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \geq k_0 \;\underline{a}_k \in S(\underline{a}, \varepsilon),$$

pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \geq k_0 \;\; \| \underline{a}_k - \underline{a} \| < \varepsilon.$$

Az egydimenziós esetben megismert fogalmak és tételek egy része értelmes $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra is, bizonyításuk szinte szó szerint ugyanaz.

2.3. Állítás. *Ha $\underline{a}_k \to \underline{a}$, $\underline{b}_k \to \underline{b}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda\underline{a}_k \to \lambda\underline{a}$ és $(\underline{a}_k \pm \underline{b}_k) \to (\underline{a} \pm \underline{b})$.*

2.4. Feladat. Bizonyítsa be az 2.3 Állítást.

Általában nincsen értelme: sorozatok szorzatáról, sorozat monotonitásáról vagy sorozat ∞-hez tartásáról beszélni.

Belátjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatok konvergenciája visszavezethető klasszikus sorozatok konvergenciájára.

2.5. Tétel. *Ha* $\underline{a}_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$ *egy sorozat és* $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, akkor*

$$\lim_{k\to\infty} \underline{a}_k = \underline{a} \iff \forall\, i \lim_{k\to\infty} a_k^i = a_i.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\underline{a}_k \to \underline{a}$. Legyen $1 \le i \le n$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik k_0, hogy minden $k \ge k_0$-ra $\| \underline{a}_k - \underline{a} \| < \varepsilon$. Tudjuk továbbá, hogy minden k-ra

$$|a_k^i - a_i| \le \Big(\sum_{j=1}^n (a_k^j - a_j)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \| \underline{a}_k - \underline{a} \| < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lim_{k\to\infty} a_k^i = a_i$.

Fordítva: Tegyük fel, hogy minden i-re $\lim_{k\to\infty} a_k^i = a_i$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz minden i-re létezik k_i, hogy minden $k \ge k_i$-re $|a_k^i - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Legyen $k_0 = \max\{k_i : 1 \le i \le n\}$. Ekkor ha $k \ge k_0$, akkor

$$\|\underline{a}_k - \underline{a}\| = \Big(\sum_{j=1}^n (a_k^j - a_j)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{j=1}^n \Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\underline{a}_k \to \underline{a}$. □

2.6. Feladat. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1+2^k}{k!}, \left(\frac{k-1}{k+2}\right)^{2k-1} \right) = ?$

2.7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $\underline{a}_k$ és $\underline{b}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli konvergens sorozatok, $\underline{a}_k \to \underline{a}$ és $\underline{b}_k \to \underline{b}$, akkor $\underline{a}_k \underline{b}_k \to \underline{a}\underline{b}$.

2.8. Feladat*. Bizonyítsa be, hogy ha $\underline{a}_k$ és $\underline{b}_k$ $\mathbb{R}^3$-beli konvergens sorozatok, $\underline{a}_k \to \underline{a}$ és $\underline{b}_k \to \underline{b}$, akkor $(\underline{a}_k \times \underline{b}_k) \to (\underline{a} \times \underline{b})$.

Korlátos sorozatok

2.9. Definíció. Egy $\underline{a}_k$ sorozat *korlátos*, ha az $\{\underline{a}_k : k \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos, vagyis létezik $K > 0$, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re $\|\underline{a}_k\| < K$.

2.10. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Mutasson példát arra, hogy ennek megfordítása nem igaz, vagyis abból, hogy egy sorozat korlátos nem feltétlenül következik, hogy konvergens (n dimenzióban).

A következő tétel a Bolzano-Weierstrass Tétel többdimenziós általnosítása.

2.11. Tétel. (Bolzano-Weierstrass Tétel) *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a}_k = (a_k^1, \dots, a_k^n)$ egy korlátos sorozat. Ekkor természetesen minden i-re az a_k^i $\mathbb{R}$-beli sorozatok is korlátosak. A klasszikus Bolzano-Weierstrass tétel n-szeres egymásutáni alkalmazásával belátjuk, hogy van "közös" konvergens részsorozatuk, vagyis egy $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy minden i-re az $a^i_{k(d)}$ sorozat konvergens, vagyis az 2.5 Tétel szerint az $\underline{a}_{k_d}$ sorozat konvergens.

Az a^1_k sorozat korlátos. Legyen $k_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amire $a^1_{k_1(d)}$ konvergens, $\lim_{d\to\infty} a^1_{k_1(d)} = a_1$.

Az $a^2_{k_1(d)}$ sorozat korlátos. Legyen $k_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amire $a^2_{k_1(k_2(d))}$ konvergens, $\lim_{d\to\infty} a^2_{k_1(k_2(d))} = a_2$.

"És így tovább", kapjuk a $k_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényeket minden $1 \le i \le n$-re, melyekkel minden i-re

$$\lim_{d\to\infty} a^i_{k_1(\ldots(k_i(d))\ldots)} = a_i.$$

Ekkor a $k(d) = k_1(k_2(\ldots k_n(d)\ldots))$ függvény megfelelő. Ezzel a k-val minden i-re az $a^i_{k(d)}$ sorozat az $a^i_{k_1(\ldots(k_i(d))\ldots)}$ konvergens sorozat részsorozata, így konvergens és $\lim_{d\to\infty} a^i_{k(d)} = a_i$. □

2.12. Feladat**. Bizonyítsa be, hogy a 2.11 Tétel bizonyításában szereplő "közös" konvergens részsorozat konstrukciója általánosítható végtelen sok sorozatra. Pontosabban, ha $\{a^1_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{a^2_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \{a^i_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots$ korlátos valós sorozatok minden $i \in \mathbb{N}$-re, akkor létezik $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy minden $i \in \mathbb{N}$-re az $\{a^i_{k(d)}\}_{d\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.

2.13. Következmény. (Cantor Axióma) *Ha $F_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ nemüres korlátos zárt (kompakt) halmazok és $F_{k+1} \subseteq F_k$ minden k-ra, akkor $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Minden k-ra válasszunk egy $\underline{a}_k \in F_k$ pontot. Ekkor az $\underline{a}_k$ sorozat korlátos, így létezik konvergens részsorozata, $\lim_{d\to\infty} \underline{a}_{k_d} = \underline{a}$. Belátjuk, hogy minden k-ra $\underline{a} \in F_k$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\underline{a} \notin F_k$ valamelyik k-ra. Mivel az F_k halmaz zárt, ezért a komplementere nyílt, így létezik $\varepsilon > 0$, hogy $S(\underline{a}, \varepsilon) \cap F_k = \emptyset$. Mivel $\lim_{d\to\infty} \underline{a}_{k_d} = \underline{a}$, ezért létezik d_0, hogy minden $d \ge d_0$-ra $\underline{a}_{k_d} \in S(\underline{a}, \varepsilon)$. Legyen $d \ge d_0$ olyan nagy, hogy $k_d > k$ teljesüljön. Ekkor $\underline{a}_{k_d} \notin F_k \supseteq F_{k_d}$, ellentmondás. □

Cauchy-sorozatok

Az egydimenzióban megismert fogalmat értelemszerűen általánosíthatjuk több dimenzióban is.

2.14. Definíció. Egy $\underline{a}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik k_0, hogy minden $l, m \ge k_0$-ra $\|\underline{a}_l - \underline{a}_m\| < \varepsilon$.

Logikai jelekkel: az $\underline{a}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat Cauchy-sorozat, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, l, m \ge k_0\ \|\underline{a}_l - \underline{a}_m\| < \varepsilon.$$

2.15. Állítás. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Adott $\underline{a}_k$ konvergens sorozat, $\underline{a}_k \to \underline{a}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik k_0, hogy minden $k \ge k_0$-ra $\|\underline{a}_k - \underline{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $l, m \ge k_0$, akkor

$$\|\underline{a}_l - \underline{a}_m\| = \|(\underline{a}_l - \underline{a}) + (\underline{a} - \underline{a}_m)\| \le \|\underline{a}_l - \underline{a}\| + \|\underline{a} - \underline{a}_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért a sorozat Cauchy-sorozat. $\square$

2.16. Tétel. *Minden Cauchy-sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a}_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n)$ egy Cauchy-sorozat. Először belátjuk, hogy minden i-re az $\{a_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ valós sorozat is Cauchy-sorozat.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és ehhez $k_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amire minden $l, m \geq k_0$ esetén $\|\underline{a}_l - \underline{a}_m\| < \varepsilon$. Ekkor minden i-re ha $l, m \geq k_0$, akkor

$$|a_l^i - a_m^i| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} (a_l^j - a_m^j)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{a}_l - \underline{a}_m\| < \varepsilon.$$

Vagyis az a_k^i sorozatok is Cauchy-sorozatok. A klasszikus sorozatokra vonatkozó jólismert tétel szerint minden i-re az a_k^i sorozat konvergens. Alkalmazva a 2.5 Tételt, kapjuk hogy az $\underline{a}_k$ sorozat is konvergens. $\square$

2.17. Következmény. *Egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

3. Függvények határértéke és folytonossága

Többváltozós vektor értékű függvények

Többváltozós függvényen egy $D \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon adott $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvényt értünk. Ebben az esetben D természetesen f értelmezési tartománya, $D = \mathrm{dom}(f)$. Az ilyen függvények tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

Például

$$f : D \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (xy, x^2 - \sqrt{y}, \frac{y}{x}),$$

ahol $D = \{(x,y) : x \neq 0 \wedge y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ a zárt felső félsík minusz az origó.

Adott D esetén, ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ függvények, akkor minden $\underline{x} \in D$-re legyen

$$(\lambda f)(\underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) \text{ és } (f+g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}).$$

Világos, hogy ekkor $\lambda f : D \to \mathbb{R}^m$ és $f + g : D \to \mathbb{R}^m$ függvényeket kapunk. Ezzel az összeadással és valós számmal való szorzással az

$$\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m) = \{f : f \text{ egy } D \to \mathbb{R}^m \text{ függvény}\}$$

halmaz egy vektortér. $m = 1$ esetén az $\mathcal{F}(D)$ jelölést használjuk.

3.1. Feladat. (Lineáris Algebra) Bizonyítsa be, hogy $\mathcal{F}(D)$-ben független halmazt alkotnak a következő függvények: $\{f_{\underline{d}} : \underline{d} \in D\}$, ahol

$$f_{\underline{d}}(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \underline{x} = \underline{d} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy ha $|D| < \infty$, akkor $\mathcal{F}(D)$-ben ezek a függvények bázist alkotnak; ha $|D| = \infty$, akkor ezek a függvények nem alkotnak bázist. Speciálisan $\mathcal{F}(D)$ pontosan akkor véges dimenziós, ha $|D| < \infty$.

Minden $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény egyértelműen megadható a *koordinátafüggvényeivel*:

$$f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}^m,$$
$$f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x})).$$

Jelölésben $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Első példánkban $f_1(x,y) = xy$, $f_2(x,y) = x^2 - \sqrt{y}$, $f_3(x,y) = \frac{y}{x}$.

3.2. Feladat. Mi a legbővebb részhalmaza $\mathbb{R}^2$-nek, ahol az

$$f(x,y) = \big(\sqrt{x-y}, \frac{x^2}{1-y^2}, \ln(xy)\big)$$

függvény értelmezhető. Ábrázolja ezt a halmazt.

Legfontosabb fogalmunk egy függvény adott $\mathbb{R}^n$-beli pontban értelmezett határértéke:

3.3. Definíció. Adott $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $\underline{x}_0 \in D'$ torlódási pontja D-nek. Az f függvény *határértéke* $\underline{x}_0$*-ban* $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$, jelölésben $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = \underline{a}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$-re $f(\underline{x}) \in S(\underline{a}, \varepsilon)$.

Fogalmazzuk meg a definíciót logikai jelekkel is többféleképpen. Ha $f: D \to \mathbb{R}^m$ és $\underline{x}_0 \in D'$, akkor $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f = \underline{a}$ pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)\; \big(f(\underline{x}) \in S(\underline{a}, \varepsilon)\big),$$

pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D\; \big(\underline{x} \in \dot{S}(\underline{x}_0, \delta) \Rightarrow f(\underline{x}) \in S(\underline{a}, \varepsilon)\big),$$

pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D\; \big(0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| < \varepsilon\big).$$

Vegyük észre, hogy a 3.3 Definícióban nincsen szerepe annak, hogy $\underline{x}_0 \in D$ vagy sem. Továbbá, ha esetleg f értelmezve van $\underline{x}_0$-ban, akkor sem számít, hogy mi $f(\underline{x}_0)$, mivel a definícióban $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$ szerepel, vagyis $\underline{x}_0$-al nem foglalkozunk.

A sorozatokra vonatkozó 2.3 Állítás megfelelője igaz függvényekre is:

3.4. Állítás. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g: D \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in D'$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f = \underline{a}$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g = \underline{b}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \lambda f = \lambda \underline{a}$ és $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} (f+g) = \underline{a} + \underline{b}$.*

3.5. Feladat. Bizonyítsa be a 3.4 Állítást.

Vizsgáljuk meg a következő két példát:

1.) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$, mert $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \le |\frac{x^2y}{x^2}| = |y|$, és így ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\delta = \varepsilon$ megfelelő, mert ha $(x,y) \in \dot{S}(\underline{0}, \varepsilon)$, akkor

$$|f(x,y) - 0| = |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \le |y| \le \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

2.) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$, mert

$$\Big|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}\Big| = \frac{|y|}{(\frac{x}{y})^2 + (\frac{y}{x})^2} \le |y| \to 0,$$

ha $(x,y) \to \underline{0}$.

3.) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{xy}{x-y}$ nem létezik, mert ha létezne, akkor csak 0 lehetne, ugyanis $xy \neq 0$ esetén $f(0,y) = f(x,0) = 0$, vagyis $(0,0)$-hoz bármilyen közel felveszi a függvény a 0 értéket. Viszont a függvény $(0,0)$-hoz tetszőlegesen közel felvesz 1-hez nagyon közeli értéket is: $(0,0)$-hoz tetszőlegesen közel van $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ alakú pont ($n \in \mathbb{N}$). Erre alkalmazva a függvényt:

$$f(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n} \to 1.$$

4.) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, mert áttérve polárkoordinátákra: Ha az (x,y) vektor hossza r és az x tengellyel bezárt szöge φ, akkor $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, így

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\varphi) r^2 \sin^2(\varphi)}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) = 0$$

minden fix φ-re. Ebből általában még nem következik, hogy az eredeti határérték is létezik! Most azonban $\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)$ korlátos, így a határérték definíciójában minden φ-hez, vagyis minden irányhoz tudunk közös δ-t választani, így létezik az eredeti határérték is és persze 0-val egyenlő.

3.6. Feladat. $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{xy^2}{x^4+y^2} =?$

3.7. Feladat. $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} =?$

Példáinkban minden függvény $\mathbb{R}$-be képezett. Ez nem véletlen, "elég" az ilyen függvényekre elsajátítani a határértékszámítási technikákat, mert a sorozatokra vonatkozó 2.5 Tételhez hasonlóan most is igaz a következő:

3.8. Tétel. *Adott $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ és $\underline{x}_0 \in D'$ esetén $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f = \underline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ pontosan akkor, ha minden $1 \le i \le m$-re $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f_i = a_i$.*

Az 3.8 Tétel bizonyítása a sorozatokra vonatkozó megfelelője bizonyításának kézenfekvő módosításával adódik, így elhagyjuk.

3.9. Feladat. Bizonyítsa be a 3.8 Tételt.

Folytonos függvények

3.10. Definíció. Adott $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $\underline{x}_0 \in D$. Az f függvény *folytonos $\underline{x}_0$-ban*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in D \cap S(\underline{x}_0, \delta)$-re $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$. Az f függvény *folytonos*, ha minden $\underline{x}_0 \in D$-re f folytonos $\underline{x}_0$-ban.

Most is fogalmazzuk meg a definíciót logikai jelekkel is többféleképpen: Az $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor folytonos az $\underline{x}_0 \in D$ pontban, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D \cap S(\underline{x}_0, \delta)\; \big(f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)\big),$$

pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D\; \big(\underline{x} \in S(\underline{x}_0, \delta) \Rightarrow f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)\big),$$

pontosan akkor, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, \underline{x} \in D\; \big(\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon\big).$$

Vegyük észre, hogy egy függvény folytonosságát csak értelmezési tartományának pontjaiban vizsgáljuk és nem tesszük fel, hogy ez a pont torlódási pontja az értelmezési tartománynak. Tehát nem ugyanazokban a pontokban vizsgáljuk egy függvény határértékét és folytonosságát. Ha $\underline{x}_0 \in D$ egy *izolált pont*, vagyis létezik $\delta > 0$, hogy $D \cap S(\underline{x}_0, \delta) = \{\underline{x}_0\}$, akkor minden $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonos $\underline{x}_0$-ban.

3.11. Feladat. Gondolja meg, hogy az $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|$ függvény triviálisan folytonos.

A következő tétel a nyílt halmazok és a folytonosság kapcsolatát mutatja.

3.12. Tétel. *Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $V \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra az $f^{-1}(V) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) \in V\} \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz is nyílt.*

Általánosabban: Egy $f : D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $V \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazhoz létezik egy $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, hogy $f^{-1}(V) = D \cap U$.

Bizonyítás. Legyen $f : D \to \mathbb{R}^m$ egy folytonos függvény és $V \subseteq \mathbb{R}^m$ egy nyílt halmaz. Ha $\underline{x} \in f^{-1}(V)$, vagyis $f(\underline{x}) \in V$, akkor V nyíltsága miatt létezik egy $\varepsilon_{\underline{x}} > 0$, hogy $S(f(\underline{x}), \varepsilon_{\underline{x}}) \subseteq V$. Minden $\underline{x} \in f^{-1}(V)$-hez f folytonosság miatt létezik egy $\delta_{\underline{x}} > 0$, hogy minden $\underline{y} \in D \cap S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})$-re $f(\underline{y}) \in S(f(\underline{x}), \varepsilon_{\underline{x}})$, vagyis

$$f(D \cap S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})) \subseteq S(f(\underline{x}), \varepsilon_{\underline{x}}) \subseteq V.$$

Legyen $U = \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})$. Ekkor

$$f(D \cap U) = f\Big(\bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} D \cap S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})\Big) = \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} f(D \cap S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})) \subseteq V,$$

vagyis $D \cap U \subseteq f^{-1}(V)$. Továbbá $f^{-1}(V)$ minden $\underline{x}$ pontja eleme $S(\underline{x}, \delta_{\underline{x}})$-nek, így $D \cap U$-nak is, vagyis $f^{-1}(V) \subseteq D \cap U$ is teljesül. Tehát $D \cap U = f^{-1}(V)$.

Fordítva: Legyen $\underline{x} \in D$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Alkalmazva a feltételt a $V = S(f(\underline{x}), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra kapjuk, hogy létezik egy $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amire $D \cap U = f^{-1}(V)$. Legyen $\delta > 0$, amire $S(\underline{x}, \delta) \subseteq U$. Ekkor minden $\underline{y} \in D \cap S(\underline{x}, \delta)$-ra $\underline{y} \in D \cap U$, így $f(\underline{y}) \in V = S(f(\underline{x}), \varepsilon)$. Mivel $\underline{x}$ és ε tetszőleges volt, ezért f minden pontban folytonos. □

Vizsgáljuk meg a határérték és folytonosság kapcsolatát. A következő tétel triviális, bizonyítását a gyakorlás kedvéért mégis leírjuk.

3.13. Tétel. *Adott $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $\underline{x}_0 \in D \cap D'$ esetén f pontosan akkor folytonos $\underline{x}_0$-ban, ha $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = f(\underline{x}_0)$.*

Bizonyítás. Az $\underline{x}_0 \in D \cap D'$ feltétel miatt $\underline{x}_0$-ban van értelme folytonosságról és határértékről is beszélni.

Tegyük fel, hogy f folytonos $\underline{x}_0$-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik $\delta > 0$, hogy ha $\underline{x} \in D \cap S(\underline{x}_0, \delta)$, akkor $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$. Ekkor természetesen minden $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$-ra is $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = f(\underline{x}_0)$.

Tegyük fel, hogy $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = f(\underline{x}_0)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik $\delta > 0$, hogy ha $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$, akkor $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$. Mivel $f(\underline{x}_0) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$, ezért minden $\underline{x} \in D \cap S(\underline{x}_0, \delta)$-re $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \varepsilon)$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért a függvény folytonos $\underline{x}_0$-ban. □

A 3.4 Állítás és a 3.13 Tétel következményeként adódik a következő:

3.14. Állítás. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ az $\underline{x}_0 \in D$ pontban folytonos függvények és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a λf és $f + g$ függvények is folytonosak $\underline{x}_0$-ban.*

Legyen $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^m)$ illetve $\mathcal{C}(D)$, ha $m = 1$ a D-n értelmezett folytonos függvények halmaza:

$$\mathcal{C}(D, \mathbb{R}^m) = \{f : f \text{ egy } D \to \mathbb{R}^m \text{ folytonos függvény}\}.$$

A 3.14 Állítás szerint ez a halmaz vektortér, speciálisan az $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ illetve az $\mathcal{F}(D)$ vektortér altere. Belátható, hogy $\mathcal{C}(D)$ is végtelen dimenziós, ha D végtelen.

A 3.8 és 3.13 Tételek következményeként adódik a következő:

3.15. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ és $\underline{x}_0 \in D$, akkor f pontosan akkor folytonos $\underline{x}_0$-ban, ha minden $1 \leq i \leq m$-re f_i folytonos $\underline{x}_0$-ban.*

A Weierstrass Tétel többdimenziós általánosítása is igaz, ugyanazzal a bizonyítással.

3.16. Tétel. (Weierstrass Tétel) *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy korlátos zárt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}^m$ egy folytonos függvény K-n, akkor $f(K)$ is korlátos zárt. Speciálisan, ha $m = 1$, akkor f felveszi a maximumát és minimumát.*

3.17. Feladat. Bizonyítsa be a Weierstrass Tételt.

A következő tétel az összetett függvények folytonosságára ad elégséges feltételt.

3.18. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in D$, $f(\underline{x}_0) \in H \subseteq \mathbb{R}^m$ és $g : H \to \mathbb{R}^k$. Ekkor ha f folytonos $\underline{x}_0$-ban és g folytonos $f(\underline{x}_0)$-ban, akkor $g \circ f$ folytonos $\underline{x}_0$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Mivel g folytonos $f(\underline{x}_0)$-ban, ezért létezik $\delta_1 > 0$, hogy minden $\underline{y} \in H \cap S(f(\underline{x}_0), \delta_1)$-re $g(\underline{y}) \in S(g(f(\underline{x}_0)), \varepsilon)$.

Mivel f folytonos $\underline{x}_0$-ban, ezért δ_1-hez (mint ε-hoz) létezik egy $\delta_2 > 0$, hogy minden $\underline{x} \in D \cap S(\underline{x}_0, \delta_2)$-re $f(\underline{x}) \in S(f(\underline{x}_0), \delta_1)$.

Legyen $\delta = \delta_2$. Ekkor ha $\underline{x} \in \text{dom}(g \circ f) \cap S(\underline{x}_0, \delta)$, akkor $f(\underline{x}) \in H \cap S(f(\underline{x}_0), \delta_1)$ és így $g(f(\underline{x})) \in S(g(f(\underline{x}_0)), \varepsilon)$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $g \circ f$ folytonos $\underline{x}_0$-ban. $\square$

Fontos megjegyeznünk, hogy az egydimenziós esethez hasonlóan többváltozós függvények esetében sem igaz a 3.18 Tétel megfordítása.

3.19. Feladat. Mutasson példát tetszőleges n, m és k esetén sehol sem folytonos $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ függvényekre, melyekre $g \circ f \equiv \underline{0}$, speciálisan a $g \circ f$ függvény mindenhol folytonos.

Hogyan konstruálhatunk $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket? Erre adunk egy-két egyszerű példát. Könnyen belátható, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re az

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

függvény (mindenhol) folytonos, amiből a 3.18 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor minden i-re az

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_i)$$

függvények is folytonosak. Például az $f(x, y) = \sin(y)$ függvény folytonos.

A 3.14 Állítás felhasználásával kapjuk, hogy ilyen függvények összege és számszorosa is folytonos, például az

$$f(x,y) = -2\sin(3x+1) + 4x^3 - \sqrt{2}y\ln(y^2+1)$$

függvény folytonos. Hasonlóan ha $(a_{i1},\dots,a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, akkor az $f(x_1,\dots,x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ függvény is folytonos, amiből a 3.15 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy minden lineáris leképezés folytonos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & amn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Persze az eljárást tovább bonyolíthatjuk: ilyen függvények kompozíciója egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvénnyel. És így tovább: összeg, számszoros illetve kompozíció. Például az

$$f(x,y) = \sqrt{2x\sin(x) - x - 3y^4} - \ln\left(x^{\frac{3}{4}} - \frac{-2\mathrm{ch}(y+1)}{y+\pi}\right)$$

függvény folytonos az értelmezési tartományán.

Általában nincs értelme vektorértékű, vagyis $f : D \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$ függvények szorzatáról beszélni, de ha $m = 1$, akkor persze értelmezhető a szorzat: ha $f, g : D \to \mathbb{R}$, akkor minden $\underline{x} \in D$-re legyen

$$(fg)(\underline{x}) = f(\underline{x})g(\underline{x}).$$

Teljesen hasonlóan, ha $f, g : D \to \mathbb{R}$ és minden $\underline{x} \in D$-re $g(\underline{x}) \neq 0$, akkor minden $\underline{x} \in D$-re legyen

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}.$$

Világos, hogy ezekben az esetekben $fg, \frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ függvényeket kaptunk. Ha nem kötjük ki, hogy $\forall\ \underline{x} \in D\ g(\underline{x}) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény értelmezési tartománya $\mathrm{dom}(\frac{f}{g}) = \{\underline{x} \in \mathrm{dom}(g) : g(\underline{x}) \neq 0\}$. A következő tétel az egyváltozós esetben megismert változatának általánosítása, bizonyítása teljesen analóg.

3.20. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$ és $f, g : D \to \mathbb{R}$ az $\underline{x}_0 \in D$ pontban folytonos függvények, akkor az fg függvény is folytonos $\underline{x}_0$-ban. Továbbá, ha $g(\underline{x}_0) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos $\underline{x}_0$-ban.*

Tehát folytonos függvények szorzata és hányadosa is (ha értelmes) folytonos. Ennek segítségével már rengeteg folytonos függvényt kreálhatunk. Például az

$$f(x,y) = \frac{x^2\sqrt{y} - \ln(x-y^2)}{x + y\mathrm{ch}(xy)} + \frac{x}{y^5}\sqrt[3]{\frac{y^{-\frac{1}{6}} + x}{\sqrt{x-3y}}} + 2$$

függvény folytonos az értelmezési tartományán.

Ha az itt felsorolt módszerekkel megkapható egy függvény, akkor folytonosságának igazolálsára csak annyit szoktunk mondani, hogy "Folytonosságot megőrző módon van felépítve elemi függvényekből, így értelmezési tartományán folytonos".

3.21. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$-ra az $\underline{a}$-val való sakláris és vektoriális szorzás: $s_{\underline{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $s_{\underline{a}}(\underline{x}) = \underline{a}\underline{x}$ illetve $v_{\underline{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v_{\underline{a}}(\underline{x}) = \underline{a} \times \underline{x}$ folytonos függvények.

Átviteli Elv és egyenletes folytonosság

A függvények és a sorozatok határértékének szoros kapcsolatát mutatja a következő tétel, melyet konkrét példáknál rengetegszer fogunk alkalmazni. Bizonyítása teljesen analóg egyváltozós megfelelőjének bizonyításával, mégis megadjuk, mert klasszikus, sokszor hasznos techinkai elemeket tartalmaz.

3.22. Tétel. (Átviteli Elv) *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $\underline{x}_0 \in D'$ torlódási pont. Ekkor $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = \underline{a}$ pontosan akkor, ha minden D-beli $\underline{x}_0$-hoz konvergáló $\underline{x}_k \neq \underline{x}_0$ sorozatra $f(\underline{x}_k) \to \underline{a}$.*

Logikai jelekkel:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = \underline{a} \iff \forall \{\underline{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq D \backslash \{\underline{x}_0\} \ (\underline{x}_k \to \underline{x}_0 \Rightarrow f(\underline{x}_k) \to \underline{a}).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f = \underline{a}$ és $\underline{x}_k$ egy D-beli sorozat, $\underline{x}_k \neq \underline{x}_0$, melyre $\underline{x}_k \to \underline{x}_0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a határérték definíciója szerint létezik $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$-ra $f(\underline{x}) \in S(\underline{a}, \varepsilon)$. Egy ilyen δ-hoz létezik k_0 küszöbindex, hogy minden $k \geq k_0$-ra $\underline{x}_k \in \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$. Ekkor minden $k \geq k_0$-ra $f(\underline{x}_k) \in S(\underline{a}, \varepsilon)$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $f(\underline{x}_k) \to \underline{a}$.

Fordítva: Belátjuk, hogy ha $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f \neq \underline{a}$ (esetleg nem is létezik), akkor létezik egy $\underline{x}_k \in D \backslash \{\underline{x}_0\}$ sorozat, amire $\underline{x}_k \to \underline{x}_0$, de $f(\underline{x}_k) \not\to \underline{a}$. A határérték definíciójának tagadása szerint létezik egy $\varepsilon > 0$, amihez egyetlen $\delta > 0$ sem megfelelő, vagyis minden $\delta > 0$-hoz létezik egy $\underline{x} \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \delta)$, amire $f(\underline{x}) \notin S(\underline{a}, \varepsilon)$. Minden $k \in \mathbb{N}$-re $\delta = \frac{1}{k}$ sem megfelelő, ami azt jelenti, hogy van egy $\underline{x}_k \in D \cap \dot{S}(\underline{x}_0, \frac{1}{k})$, amire $f(\underline{x}_k) \notin S(\underline{a}, \varepsilon)$. Ekkor persze $\underline{x}_k \neq \underline{x}_0$ és $\underline{x}_k \to \underline{x}_0$, de $f(\underline{x}_k) \not\to \underline{a}$, hiszen minden k-ra $\|f(\underline{x}_k) - \underline{a}\| \geq \varepsilon$. □

Felhasználva a határérétek és a folytonosság kapcsolatát (3.13 Tétel) kapjuk az Átviteli Elv következő változatát.

3.23. Következmény. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $\underline{x}_0 \in D$. Ekkor f pontosan akkor folytonos $\underline{x}_0$-ban, ha minden D-beli $\underline{x}_0$-hoz konvergáló $\underline{x}_k$ sorozatra $f(\underline{x}_k) \to f(\underline{x}_0)$.*

Az Átviteli Elv segítségével könnyen belátható, hogy bizonyos határértékek nem léteznek. Valójában a határérték definíciója utáni 3.) példában is ezt használtuk már. Általában nem fogunk konkrét sorozatokat megadni, hanem csak az adott ponton átmenő folytonos görbéket, "amik mentén különböző a limesz". Ez a konkrét példákban teljesen világos lesz, és természetesen ebből már megadhatók a sorozatok is, amik mutatják, hogy nem létezik a limesz.

1.) $\lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ nem létezik: Ha $x = 0$, akkor $\lim_{y \to 0} \frac{0}{y^3} = 0$, de ha $x = y$, akkor $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \neq 0$.

2.) $\lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$ nem létezik: 1.)-hez hasonlóan belátható, hogy a $\frac{xy}{x^2+y^2}$ függvénynek nem létezik határértéke $\underline{0}$-ban. Továbbá tudjuk, hogy $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$. Tehát

$$\lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{\sin(xy)}{xy} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 1 \cdot \lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

ami nem létezik.

3.) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ nem létezik: Ha $x=0$, akkor $\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$, de ha $y=x^2$, akkor $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$.

3.24. Feladat. $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{xy^2}{y^4-x^3}=?$

3.25. Feladat. $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=?$

Az egyenletes folytonosság fogalma értelemszerűen általánosítható többváltozós függvényekre.

3.26. Definíció. Egy $f: D\to\mathbb{R}^m$ $(D\subseteq\mathbb{R}^n)$ függvény *egyenletesen folytonos* (D-*n*), ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy minden $\underline{x},\underline{y}\in D$-re, ha $\|\underline{x}-\underline{y}\|<\delta$, akkor $\|f(\underline{x})-f(\underline{y})\|<\varepsilon$.

Logikai jelekkel: $f: D\to\mathbb{R}^n$ egyenletesen folytonos, ha

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,\underline{x},\underline{y}\in D\;\big(\|\underline{x}-\underline{y}\|<\delta\Rightarrow\|f(\underline{x})-f(\underline{y})\|<\varepsilon\big).$$

3.27. Feladat. Bizonyítsa be, hogy egy egyenletesen folytonos függvény speciálisan folytonos is.

A Heine Tétel általánosítása is igaz többváltozós esetben, bizonyítása analóg az egyváltozós esetével, így elhagyjuk.

3.28. Tétel. (Heine Tétel) *Ha $K\subseteq\mathbb{R}^n$ egy korlátos zárt halmaz és $f: K\to\mathbb{R}^m$ egy folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos K-n.*

3.29. Feladat. Bizonyítsa be a Heine Tételt.

Érdekességek

A következő híres tétel informálisan azt a meglepő tényt állítja, hogy "egy egydimenziós dologgal folytonosan kitölthető egy többdimenziós", vagyis például "madzaggal egy négyzet".

3.30. Tétel. *Minden $n\in\mathbb{N}$-re létezik $f:[0,1]\to[0,1]^n$ folytonos szürjekció.*

$n=2$ esetén a 3.30 Tétel szerint létező függvényeket *Peano-görbéknek* nevezzük. Egy ilyen f függvénynek két koordinátafüggvénye van: $f=(f_1,f_2)$, ahol $f_1,f_2:[0,1]\to[0,1]$. Belátható, hogy egy Peano-görbének nem lehet mindkét koordinátafüggvénye minden pontban differenciálható. (Nehéz!)

Természetes a kérdés, hogy van-e olyan Peano-görbe, amire minden $x\in[0,1]$ esetén legalább az egyik koordinátafüggvény differenciálható x-ben. Ezt a kérdést nem lehet eldönteni!!! Ez egy úgynevezett független állítás, vagyis ha a "matematikában" nincsen ellentmondás, akkor soha nem fogjuk tudni bebizonyítani sem azt, hogy létezik, sem azt, hogy nem létezik ilyen függvény!

Megemlítjük, hogy egy ilyen speciális Peano-görbe létezése ekvivalens a *Kontinuum Hipotézissel*, ami az állítja, hogy minden $A\subseteq\mathbb{R}$ végtelen halmazra vagy létezik $F:\mathbb{N}\to A$ bijekció, vagy létezik $G:\mathbb{R}\to A$ bijekció, vagyis hogy $\mathbb{R}$ minden részhalmaza vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.

A következő tétel azt a szemléletes tényt fejezi ki, hogy "Egy korongból csak úgy tudunk lyukas korongot csinálni, ha széttépjük.".

3.31. Tétel. (Borsuk Tétele) *Nem létezik olyan folytonos függvény a kétdimenziós zárt körlapról a határára, melynél a határpontok fixen maradnak.*

Precízen, ha $D^2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\| \leq 1\}$ *az egység sugarú zárt körlap a síkon és* $S^1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\| = 1\}$ *az egydimenziós körvonal, vagyis* D^2 *határa, akkor nincsen olyan* $f : D^2 \to S^1$ *folytonos függvény, hogy minden* $\underline{x} \in S^1$*-re* $f(\underline{x}) = \underline{x}$.

A következő híres tétel az $n = 2$ esetben Borsuk Tételének könnyű következménye, de általában is igaz. Az állítja, hogy "Egy tál leveset nem lehet igazán megkeverni, vagyis akármeddig kevered egy pontja biztos, hogy a kiindulási helyzetébe kerül vissza.".

3.32. Tétel. (Brouwer Fixponttétel) *Minden* $n \in \mathbb{N}$*-re, ha* D^n *az* n*-dimenziós origó körüli zárt egységgömb, akkor minden* $f : D^n \to D^n$ *folytonos függvénynek van fixpontja, vagyis egy* $\underline{x} \in D^n$*, amire* $f(\underline{x}) = \underline{x}$.

A következő tételt informálisan úgy is szokták emlegetni, hogy "Egy sündisznót nem lehet megfésülni, mindenképpen lesz forgója." vagy hogy "A földön minden pillanatban valahol szélcsend van.".

3.33. Tétel. (Sündisznó Tétel) *Nem létezik sehol sem nulla folytonos érintő vektormező a kétdimenziós gömbfelületen.*

Precízen: Nincsen olyan $f : S^2 \to \mathbb{R}^3 \backslash \{\underline{0}\}$ *folytonos függvény, melyre minden* $\underline{x} \in S^2$ *esetén* $\underline{x} \perp f(\underline{x})$.

3.34. Feladat. Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényt *kontrakciónak* nevezünk, ha létezik $q < 1$ szám, hogy minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$-re $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| < q\|\underline{x} - \underline{y}\|$. Bizonyítsa be, hogy minden kontrakció folytonos.

3.35. Feladat. (Banach Fixponttétel) Bizonyítsa be, hogy minden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kontrakciónak létezik egyetlen fixpontja, vagyis egy $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, amire $f(\underline{x}) = \underline{x}$. (Ötlet: limeszként keressük a fixpontot.)

4. Többváltozós függvények differenciálhatósága

Skalár értékű függvények differenciálhatósága

Először is emlékeztetünk az egyváltozós differenciálhatóságra: Legyen $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor f differenciálható a-ban, ha a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges. Ezt az értékét neveztük a függvény a-beli deriváltjának. A többváltozós esetben persze nem lenne értelme az osztásnak. Ismert, hogy az egyváltozós differenciálhatóság átfogalmazható a következőképpen:

Ha $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$, akkor f pontosan akkor differenciálható a-ban, ha létezik egy A szám, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + A(x-a))}{|x - a|} = 0,$$

vagy másképpen: létezik egy A szám és egy $r_a : D \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + r_a(x) \ \text{ és } \ \lim_{x \to a} \frac{r_a(x)}{|x-a|} = 0.$$

Ennek segítségével már az egyváltozós esethez analóg módon definiálhatjuk többváltozós függvények differenciálhatóságát. Tetszőleges $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ pont koordinátás alakját általában $(x_1, \ldots, x_n)$ jelöli.

4.1. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$, akkor az f *differenciálható* $\underline{a}$*-ban*, ha léteznek $A_1, \ldots, A_n$ számok, hogy

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - (f(\underline{a}) + (A_1, \ldots, A_n)(\underline{x} - \underline{a}))}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0,$$

vagy másképpen: léteznek $A_1, \ldots, A_n$ számok és létezik egy $r_{\underline{a}} : D \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + (A_1, \ldots, A_n)(\underline{x} - \underline{a}) + r_{\underline{a}}(\underline{x}) \ \text{ és } \ \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0.$$

Az f függvény *differenciálható* D*-n*, ha minden $\underline{a} \in D$-ben differenciálható.

A derivált értelmezéséhez be kell még látnunk, hogy az A_i számok egyértelműek.

4.2. Állítás. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor az $A_1, \ldots, A_n$ számok egyértelműek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a differenciálhatóság feltétele teljesül az $A_1, \ldots, A_n$ és a $B_1, \ldots, B_n$ számokkal is. Ekkor léteznek $r_{\underline{a}}$ és $v_{\underline{a}}$ függvények, melyekre

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + (A_1, \ldots, A_n)(\underline{x} - \underline{a}) + r_{\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + (B_1, \ldots, B_n)(\underline{x} - \underline{a}) + v_{\underline{a}}(\underline{x}),$$

továbbá $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0$ és $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{v_{\underline{a}}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0$. Belátjuk, hogy minden i-re $A_i = B_i$. Legyen $\underline{x}_t = \underline{a} + t\underline{e}^i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Ekkor

$$t(A_i - B_i) = (A_1 - B_1, \ldots, A_n - B_n)(\underline{x}_t - \underline{a}) =$$

$$\big((A_1,\dots,A_n)-(B_1,\dots,B_n)\big)(\underline{x}_t-\underline{a})=v_{\underline{a}}(\underline{x}_t)-r_{\underline{a}}(\underline{x}_t).$$

Vagyis minden t-re $|A_i-B_i|=\frac{|v_{\underline{a}}(\underline{x}_t)-r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)|}{|t|}=\frac{|v_{\underline{a}}(\underline{x}_t)-r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)|}{\|\underline{x}_t-\underline{a}\|}$. A feltételek miatt $\lim_{t\to 0}\frac{|r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)-v_{\underline{a}}(\underline{x}_t)|}{\|\underline{x}_t-\underline{a}\|}=\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}\frac{|r_{\underline{a}}(\underline{x})-v_{\underline{a}}(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}=0$, így $|A_i-B_i|$ tetszőlegesen kicsi lehet, vagyis csak $A_i=B_i$ lehetséges. □

Például, ha $f(x,y)=xy$, akkor $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=(y_0,x_0)$ minden (x_0,y_0) pontban:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{xy-(x_0y_0+(y_0,x_0)(x-x_0,y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

határértékből az $u=x-x_0$, $v=y-y_0$ helyettesítéssel:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{(u+x_0)(v+y_0)-x_0y_0-y_0u-x_0v}{\sqrt{u^2+v^2}}=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

amit átírva polárkoordinátákra: $u=r\cos(\varphi)$, $v=r\sin(\varphi)$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}=\lim_{r\to 0}r\cos(\varphi)\sin(\varphi)=0$$

minden φ-re. Mivel $\cos(\varphi)\sin(\varphi)$ korlátos, ezért az eredeti határérték is 0.

Most már definiálhatjuk egy függvény deriváltját is (nem csak a differenciálhatóságát): Ha f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor az f *gradiense vagy deriváltja* $\underline{a}$*-ban*:

$$\mathrm{grad}f(\underline{a})=\nabla f(\underline{a})=(A_1,\dots,A_n),$$

ahol $A_1,\dots,A_n$ a differenciálhatóság definíciója szerint létező és a 4.2 Állítás szerint egyértelmű számok. Ha f differenciálható a $H\subseteq D$ minden pontjában, akkor beszélhetünk az f függvény

$$\mathrm{grad}f:H\to\mathbb{R}^n$$

gradiens- vagy deriváltfüggvényéről.

A következő állítás egyváltozós megfelelőjének triviális következménye.

4.3. Állítás. *Ha $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\underline{a}\in\mathrm{int}(D)$, $f,g:D\to\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, továbbá f és g differenciálhatók $\underline{a}$-ban, akkor λf, $f+g$, fg és ha $g(\underline{a})\neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható $\underline{a}$-ban és*

$$\mathrm{grad}(\lambda f)(\underline{a})=\lambda\mathrm{grad}f(\underline{a}),\quad \mathrm{grad}(f+g)(\underline{a})=\mathrm{grad}f(\underline{a})+\mathrm{grad}g(\underline{a}),$$

$$\mathrm{grad}(fg)(\underline{a})=\mathrm{grad}f(\underline{a})g(\underline{a})+f(\underline{a})\mathrm{grad}g(\underline{a}),$$

$$\mathrm{grad}\Big(\frac{f}{g}\Big)(\underline{a})=\frac{\mathrm{grad}f(\underline{a})g(\underline{a})-f(\underline{a})\mathrm{grad}g(\underline{a})}{g^2(\underline{a})}.$$

Egyenlőre nem világos, hogy a 4.3 Állításban az $\underline{a}$ pont miért belső pontja az $\frac{f}{g}$ függvény értelmezési tartományának. Ez a következő tételből következik. (Érdemes meggondolni miért!)

4.4. Tétel. *Ha $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\underline{a}\in\mathrm{int}(D)$, $f:D\to\mathbb{R}$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor f folytonos $\underline{a}$-ban.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $f(\underline{x})-f(\underline{a}) = \mathrm{grad}f(\underline{a})(\underline{x}-\underline{a})+r_{\underline{a}}(\underline{x})$, ahol $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{r_a(\underline{x})}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = 0$. Legyen $\mathrm{grad}f(\underline{a}) = (A_1, \dots, A_n)$. Ekkor

$$\frac{|f(\underline{x}) - f(\underline{a})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = \frac{|\sum_{i=1}^n A_i(x_i - a_i) + r_{\underline{a}}(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} \leq \sum_{i=1}^n |A_i| \frac{|x_i - a_i|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} + \frac{|r_{\underline{a}}(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}.$$

Világos, hogy $\frac{|x_i-a_i|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} \leq 1$. Továbbá létezik $\delta_0 > 0$, hogy ha $0 < \|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta_0$, akkor $\frac{|r_a(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} < 1$, így ha $0 < \|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta_0$, akkor

$$\frac{|f(\underline{x}) - f(\underline{a})|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} < \sum_{i=1}^n |A_i| + 1.$$

Legyen $K = \sum_{i=1}^n |A_i| + 1$. Ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor legyen $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{K}\} > 0$. Ha $\|\underline{x}-\underline{a}\| < \delta$, akkor

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{a})| \leq K\|\underline{x}-\underline{a}\| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért f folytonos $\underline{a}$-ban. $\square$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $i = 1, \dots, n$-re az $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ függvény mindenhol differenciálható és $\mathrm{grad}f \equiv (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. A 4.3 Állítást alkalmazva kapjuk, hogy minden n-változós racionális törtfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Például az

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2y - y^4z^2 + z}{z^4 - x^2yz^3}$$

függvény differenciálható minden olyan (x, y, z) pontban, ahol nevezője nem 0.

Végezetül még egy fontos fogalmat definiálunk.

4.5. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor az *f függvény $\underline{a}$-beli érintő-hipersíkja :*

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + \mathrm{grad}f(\underline{a})(\underline{x} - \underline{a}),$$

ahol most $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és x_{n+1} az ismeretleneket jelölik az egyenletben.

Az érintő-hipersík definíciója $n = 1$ esetben a szokásos érintő egyenletét adja. $n = 2$ esetén egy függvény grafikonja egy felület $\mathbb{R}^3$-ban, melynek egy adott $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ pontbeli érintősíkja az érintő-hipersík.

Egyenlőre nem tudjuk meghatározni az $A_1, \dots, A_n$ számokat. Erre a következő részben kapunk egy módszert.

Parciális deriváltak

4.6. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy *f x_i szerint parciálisan differenciálható $\underline{a}$-ban*, ha a

$$g(t) = f(\underline{a} + t\underline{e}^i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

t-től függő függvény differenciálható a 0-ban. Ekkor *f x_i szerinti parciális deriváltja $\underline{a}$-ban:*

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = g'(0).$$

Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény x_i szerint parciálisan differenciálható egy $H \subseteq D$ halmaz minden pontjában, akkor beszélhetünk az

$$f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} : H \to \mathbb{R}$$

parciális derivált függvényről.

Az eljárás folytatható: megvizsgálhatjuk hogy H egy belső pontjában, $\underline{a}$-ban az f'_{x_i} függvény x_j szerint parciálisan differenciálható-e. Ha igen, akkor ezt a deriváltat is többféleképpen jelölhetjük:

$$f''_{x_i x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a}).$$

Az ilyen alakú deriváltat *másodrendű parciális deriváltnak* nevezzük. Az $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ alakú másodrendű parciális deriváltakat $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$-vel rövidítjük.

A parciális differenciálhatóság $n = 2$ esetén nagyon szemléletes fogalom. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$ és $f : D \to \mathbb{R}$, akkor f "grafikonja" egy D feletti "felület". A függvény $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$-beli $x = x_1$ szerinti parciális differenciálhatósága azt jelenti, hogy az f függvényt megszorítjuk az $\underline{a}$-n átmenő x tengellyel párhuzamos egyenesre és az így kapott "egyváltozós" függvény differenciálható.

Hogyan számíthatjuk ki egy többváltozós függvény parciális deriváltjait egy vagy több pontban? Lássunk egy-két példát:

1.) Legyen $f(x, y) = x^2y + 4xy + 3$. Az $(1, -2)$ pontbeli parciális deriváltakat definíció szerint a következőképpen kapjuk:

x szerinti: $g(t) = f(1+t, -2) = (1+t)^2(-2) + 4(1+t)(-2) + 3 = -2t^2 - 12t - 7$, $g'(t) = -4t - 12$, így $f'_x(1, -2) = g'(0) = -12$.

y szerinti: $g(t) = f(1, -2 + t) = 1^2(-2 + t) + 4 \cdot 1(-2 + t) + 3 = 5t - 7$, $g'(t) = 5$, így $f'_y(1, -2) = g'(0) = 5$.

Hogyan számolhatnánk ki egyszerre minden pontban a függvény x illetve y szerinti parciális deriváltját, vagyis az f'_x és f'_y függvényeket?

x szerinti: f-et egyváltozós függvénynek tekintjük y konstans paraméterrel, vagyis $f'_x(x, y) = 2xy + 4y$.

y szerinti: f-et egyváltozós függvénynek tekintjük x konstans paraméterrel, vagyis $f'_y(x, y) = x^2 + 4x$.

2.) Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor a függvény x szerinti parciális deriváltja $(0, 0)$-ban definíció szerint: $g(t) = f(0 + t, 0) = f(t, 0) = 0$, így $f'_x(0, 0) = g'(0) = 0$. Hasonlóan $f_y(0, 0) = 0$.

Fontos megjegyeznünk, hogy gyakori a következő **hibás** gondolatmenet:

"$f'_x(x, y) = \frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, ez $(0, 0)$-nál nem értelmezhető, ezért a függvény $(0, 0)$-ban nem differenciálható x szerint parciálisan".

A hiba ott van, hogy ez a képlet csak $(x, y) \neq (0, 0)$-ban adja meg az x szerinti parciális deriváltakat, $(0, 0)$-ban definíció szerint kell megvizsgálnunk f parciális differenciálhatóságát, hoszen ott nem érvényes a képlet.

3.) Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ekkor $f(x,0) = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, így definíció szerint

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ami nem létezik, így a függvény x szerint nem parciálisan differenciálható $(0,0)$-ban.

$f(0,y) = y^2\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$, így definíció szerint

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) - 0}{y-0} = \lim_{y\to 0} y\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0,$$

így $f'_y(0,0) = 0$.

4.7. Feladat. Melyik változója szerint parciálisan differenciálható az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény $(0,0)$-ban?

Az x_i szerinti parciális deriválás általánosítható.

4.8. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \text{int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}\| = 1$, akkor azt mondjuk, hogy *f a $\underline{v}$ irányban parciálisan differenciálható $\underline{a}$-ban*, ha a

$$g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v}) = f(a_1 + tv_1, \ldots, a_i + tv_i, \ldots, a_n + tv_n)$$

függvény differenciálható a 0-ban. Ekkor a függvény *$\underline{v}$ irányú iránymenti deriváltja $\underline{a}$-ban:*

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = g'(0).$$

Világos, hogy $f'_{\underline{e}^i}(\underline{a}) = f'_{x_i}(\underline{a})$.

Az x_i szerinti parciális differenciálhatósághoz hasnlóan, $n = 2$ esetén arról van szó, hogy a függvényt megszorítjuk az $\underline{a}$-n átmenő $\underline{v}$ irányú egyenesre, és az így kapott "egyváltozós" függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk.

Fontos megjegyezni, hogy ha egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény $\underline{a} \in \text{int}(D)$-ben minden $\underline{v}$ irányban differenciálható, abból még az sem következik, hogy f folytonos $\underline{a}$-ban. Például a következő függvény $\underline{a} = (0,0)$-ban.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x^2 = y > 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Továbbá, ha egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy $\underline{a} \in \text{int}(D)$ pontban és minden $\underline{v}$ irányban parciálisan differenciálható $\underline{a}$-ban, még akkor sem biztos, hogy differenciálható $\underline{a}$-ban, például $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$, $\underline{a} = (0,0)$.

4.9. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ függvény $(0,0)$-ban minden $\underline{v}$ irányban parciálisan differenciálható, de nem differenciálható.

A következő tétel a differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság kapcsolatát mutatja. Segítségével már ki tudjuk számolni egy függvény gradiensét, ha létezik.

4.10. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, $\mathrm{grad} f(\underline{a})$, akkor ott minden $\underline{v}$ irányban is differenciálható és*

$$f'_{\underline{v}}(\underline{a}) = \mathrm{grad} f(\underline{a})\underline{v},$$

speciálisan $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = (f'_{x_1}(\underline{a}), \ldots, f'_{x_n}(\underline{a}))$.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért csak a parciális deriváltakra vonatkozó $\underline{v} = \underline{e}^i$ alakú speciális esetet bizonyítjuk: $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = (A_1, \ldots, A_n)$ esetén $f'_{\underline{e}^i}(\underline{a}) = (A_1, \ldots, A_n)\underline{e}^i = A_i$.

f differenciálhatósága szerint létezik egy $r_{\underline{a}} : D \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \mathrm{grad} f(\underline{a})(\underline{x} - \underline{a}) + r_{\underline{a}}(\underline{x}) \text{ és } \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0.$$

Minden t-re legyen $\underline{x}_t = \underline{a} + t\underline{e}^i$, ekkor

$$f(\underline{x}_t) = f(\underline{a}) + A_i t + r_{\underline{a}}(\underline{x}_t).$$

A $g(t) = f(\underline{x}_t)$ függvény differenciálhatóságát kell megvizsgálnunk 0-ban:

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{f(\underline{x}_t) - f(\underline{a})}{t} = A_i + \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)}{t}.$$

Mivel $|t| = \|\underline{x}_t - \underline{a}\|$, ezért $\lim_{t\to 0} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)}{|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x}_t)}{\|\underline{x}_t - \underline{a}\|} = \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{r_{\underline{a}}(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0$, így $g'(0) = A_i$, vagyis $f'_{\underline{e}_i}(\underline{a}) = f'_{x_i}(\underline{a}) = A_i$. □

Tehát most már egyszerű módszerekkel meghatározható egy függvény deriváltja, ha differenciálható: A parciális deriváltakból álló vektor lehet csak a deriváltja. Például az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény $(0,0)$-n kívül differenciálható, mert ott racionális törtfüggvény.

$(0,0)$-ban: $f(x,0) = f(0,y) = 0$, így $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ és

$$\lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{\frac{x^3 y}{x^2+y^2} - (0 + (0,0)(x,y))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to \underline{0}} \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

mert

$$\left| \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{x^3 y}{x^3} \right| = |y| \to 0,$$

ha $(x,y) \to \underline{0}$.

4.11. Feladat. Hol differenciálható az

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{különben}\end{cases}$$

függvény?

Sajnos a differenciálhatóság problémája általános esetben csak a definícióval ellenőrizhető le, ami általában elég hosszadalmas és sokszor igen trükkös számolást igényel. Láttuk, hogy még a folytonosság és minden irányú iránymenti differenciálhatóság sem elég a differenciálhatósághoz.

Igaz viszont a következő tétel, mely konkrét példákban lényegesen leegyszerűsíti a differenciálhatóság ellenőrzését.

4.12. Tétel. *Ha $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\underline{a}\in\operatorname{int}(D)$, $f:D\to\mathbb{R}$ és f minden x_i szerint parciálisan differenciálható $\underline{a}$ egy környezetében, továbbá minden i-re az f'_{x_i} függvény folytonos $\underline{a}$-ban, akkor f differenciálható $\underline{a}$-ban.*

Ezt egy példán illusztráljuk. Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Korábbi ismereteink alapján csak annyit tudunk, hogy a függvény $(0,0)$-n kívül differenciálható, mert ott racionális törtfüggvény. $(0,0)$-ban a függvény folytonos:

$$0\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2y^2}{x^2}=y^2\to 0=f(0,0),$$

ha $(x,y)\to\underline{0}$. Parciálisan is differenciálható $(0,0)$-ban: $f(x,0)=0$, így $f'_x(0,0)=0$; $f(0,y)=0$, így $f'_y(0,0)=0$.

A parciális derivált függvények:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Már csak azt kéne belátnunk, hogy ezek a függvények folytonosak $(0,0)$-ban:

$$\Big|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\Big|=\frac{2\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}\frac{2\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{2\sqrt{|x|}y^2}{y^2}\frac{2\sqrt{|x|}y^2}{y^2}=$$

$$2\sqrt{|x|}2\sqrt{|x|}=4|x|\to 0=f'_x(0,0),$$

ha $(x,y)\to\underline{0}$. Hasonlóan f'_y is folytonos $(0,0)$-ban. Tehát a 4.12 Tétel szerint f differenciálható $(0,0)$-ban, $\operatorname{grad}f(0,0)=(0,0)$.

Vektor értékű függvények differenciálhatósága

4.13. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$ és $f = (f_1, \dots f_m) : D \to \mathbb{R}^m$, akkor az f *differenciálható $\underline{a}$-ban*, ha minden i-re f_i differenciálható $\underline{a}$-ban.

Az 4.3 Állítás alapján igaz a következő is.

4.14. Állítás. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$, továbbá f és g differenciálhatók $\underline{a}$-ban, akkor λf és $f + g$ is differenciálható $\underline{a}$-ban.*

A 4.4 Tétel általánosítása is igaz.

4.15. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$, $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor f folytonos $\underline{a}$-ban.*

Bizonyítás. A 3.8 Tétel szerint f pontosan akkor folytonos $\underline{a}$-ban, ha minden i-re f_i folytonos $\underline{a}$-ban, így elég ez utóbbit belátnunk.

A függvény differenciálhatósága $\underline{a}$-ban definíció szerint azt jelenti, hogy minden i-re az f_i függvény differenciálható $\underline{a}$-ban. A 4.4 Tétel szerint ekkor minden i-re f_i folytonos $\underline{a}$-ban. □

Eddig csak $\mathbb{R}$-be képező függvények deriváltját definiáltuk (grad). A következő definíció $\mathbb{R}^m$-be képező függvényekre is értelmezi a deriváltat.

4.16. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$, $f = (f_1, \dots f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor az f *Jacobi mátrixa $\underline{a}$-ban:*

$$\mathbf{J}_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Például a lineáris leképezések Jacobi mátrixa minden pontban megegyezik az eredeti leképezés mátrixával:

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ egy $m \times n$-es mátrix és $\varphi_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_{\mathbf{A}}(\underline{x}) = \mathbf{A}\underline{x}$ a hozzá tartozó lineráis leképezés. Belátjuk, hogy $\mathbf{J}_{\varphi_{\mathbf{A}}}(\underline{x}) = \mathbf{A}$ minden $\underline{x}$-re. Ha $\varphi_{\mathbf{A}} = (f_1, \dots, f_m)$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és a mátrix elemeit a_{ij}-vel jelöljük, akkor minden $j = 1, \dots, m$-re $f_i(\underline{x}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, így az $\underline{x}$-beli Jacobi mátrix ij-edik eleme $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = a_{ij}$.

Most már kimondhatjuk az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tételt.

4.17. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$, $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$, $H \subseteq \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, \dots, g_k) : H \to \mathbb{R}^k$, $f(\underline{a}) \in \operatorname{int}(H)$ és f differenciálható $\underline{a}$-ban, g $f(\underline{a})$-ban, akkor $g \circ f$ is differenciálható $\underline{a}$-ban és*

$$\mathbf{J}_{g \circ f}(\underline{a}) = \mathbf{J}_g(f(\underline{a}))\mathbf{J}_f(\underline{a}).$$

Vagyis ha $d = 1, \dots, k$, akkor a $(g \circ f)_d = g_d \circ f$ függvény x_i $(i = 1, \dots, n)$ szerinti parciális deriváltja $\underline{a}$-ban:

$$\frac{\partial (g \circ f)_d}{\partial x_i}(\underline{a}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_d}{\partial y_j}(f(\underline{a}))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{a}).$$

Ennek segítségével már rengeteg differenciálható függvényt konstruálhatunk. Ha egy függvény összeadás, számmal szorzás illetve kompozíció segítségével épül fel elemi függvényekből, akkor (az eddigiek alapján) differenciálható. Például az

$$f(x,y,z) = \Big(\frac{\sin(xy - z^3) + \ln(x+y)}{\sqrt{xyz+1} - xy}, \frac{x^2y - \sqrt{x}y\cos(y-z)}{-3\cos(x^4+y) + 4x}\Big)$$

függvény értelmezési tartományának minden belő pontjában differenciálható. Ilyenkor azt mondjuk, hogy "a függvény differenciálhatóságot megőrző módon épül fel elemi függvényekből".

A következő tétel a jól ismert Lagrange Középértéktételt általánosítja. Adott $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén legyen $[\underline{a}, \underline{b}] = \{\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) : t \in [0,1]\}$ az $\underline{a}$-t és $\underline{b}$-t összekötő zárt szakasz. Hasonlóan definiálható az $(\underline{a}, \underline{b})$ nyílt szakasz is.

4.18. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $[\underline{a}, \underline{b}] \subseteq \operatorname{int}(D)$ és $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható $[\underline{a}, \underline{b}]$ minden pontjában, akkor létezik $\underline{c} \in (\underline{a}, \underline{b})$, amire*

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{c})(\underline{b} - \underline{a}).$$

Röviden kitérünk a differenciálhatóság általános értelmezésére. Általánosan mit is jelent egy függvény adott pontbeli deriváltja? Általában, tetszőleges n, m esetén szeretnénk definiálni egy $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ függvény differenciálhatóságát egy $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$ pontban.

Szemléletesen: f pontosan, akkor differenciálható $\underline{a}$-ban, ha grafikonjának létezik egyértelmű érintő-hipersíkja $f(\underline{a})$-ban. Ez informálisan annyit jelent, hogy f az $\underline{a}$ pont körül "jól" közelíthető lineáris függvénnyel.

Formálisan: f pontosan, akkor differenciálható $\underline{a}$-ban, ha létezik egy $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, melyre:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{\big\| f(\underline{x}) - \big(f(\underline{a}) + \varphi(\underline{x} - \underline{a})\big) \big\|}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0.$$

Ez a definíció az összes eddigi differenciálhatóság fogalmunkat összefogja, hiszen

$m = 1$ esetén $\operatorname{grad} f(\underline{a}) \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$m > 1$ esetén $\mathbf{J}_f(\underline{a}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Vagyis megtehetnénk, hogy egyszerűen $f'(\underline{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-ről beszélünk.

Ez az összefoglaló fogalom valóban általánosabb, mint eddigi definícióink, mert csak a norma fogalmát használja. Segítségével minden olyan, akár végtelen dimenziós vektortér részhalmazain értelmezett függvények differenciálhatósága is definiálható, melyeken értelmezve van egy norma.

5. A derivált alkalmazásai

Folytonos illetve többször differenciálhatóság

5.1. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ és $\underline{a} \in \operatorname{int}(D)$, akkor

(1) f *1-szer differenciálható* $\underline{a}$*-ban*, ha differenciálható $\underline{a}$-ban;

(2) f *2-szer differenciálható* $\underline{a}$*-ban*, ha egyszer differenciálható $\underline{a}$ egy környezetében és minden koordinátafüggvényének minden parciális derivált függvénye differenciálható $\underline{a}$-ban;

$\vdots$

$(r+1)$ f *$r+1$-szer differenciálható* $\underline{a}$*-ban*, ha r-szer differenciálható $\underline{a}$ egy környezetében és minden koordinátafüggvényének minden r-ed rendű parciális derivált függvénye differenciálható $\underline{a}$-ban.

Az f *r-szer folytonosan differenciálahtó* $\underline{a}$*-ban*, ha r-szer differenciálható $\underline{a}$ egy környezetében és minden koordinátafüggvényének minden r-edrendű parciális derivált függvénye folytonos $\underline{a}$-ban.

Az f *r-szer (folytonosan) differenciálható*, ha D minden pontjában (speciálisan D nyílt) r-szer (folytonosan) differenciálható.

Legyen $\mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^m)$ illetve $\mathcal{C}^r(D)$, ha $m = 1$ a D-n értelmezett r-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza:

$$\mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^m) = \{f : f \text{ egy } D \to \mathbb{R}^m \ r\text{-szer folytonosan differenciálható függvény}\},$$

Speciálisan $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^m)$ a D-n folytonos függvények halmaza. Legyen továbbá $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m)$ a D-n minden r-re r-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza, vagyis

$$\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^m).$$

Ezek a halmazok is vektorterek a szokásos műveletekkel, speciálisan a következő alterekből álló láncot kapjuk:

$$\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}^{r+1}(D, \mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^m) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m).$$

Belátható, hogy itt mindenhol szigorú tartalmazás áll fenn és minden $\mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^m)$ $(r = 0, \ldots, \infty)$ vektortér végtelen dimenziós, ha $D \neq \emptyset$ nyílt halmaz.

Például vizsgáljuk meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, xy^2, x^2 + 3y)$ függvény többszöri (folytonos) differenciálhatóságát. Tudjuk, hogy f (egyszer) differenciálható (mindenhol). $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 3$, vagyis

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^2 & 2xy \\ 2x & 3 \end{pmatrix}$$

Ezek a függvények folytonosak, így f folytonosan differenciálható. Ezek a függvények differenciálhatók is, így f kétszer differenciálható.

Vizsgáljuk meg a másodrendű parciális deriváltakat: $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0$. Vagyis $\text{grad} f_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial x})$ miatt:

$$\mathbf{J}_{\text{grad} f_1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} = 2y$,

$$\mathbf{J}_{\text{grad} f_2}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} = 0$,

$$\mathbf{J}_{\text{grad} f_3}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A másodrendű parciális deriváltak mindenhol folytonosak, így f kétszer folytonosan differenciálható. És így tovább: f minden r-re r-szer folytonosan differenciálható, vagyis $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

A többszöri diferenciálhatóság definíciója első látásra elég bonyolultnak tűnik. Ennek fő oka az egyváltozós esettől való látszólagos eltérése. Valójában ezt a fogalmat is megfogalmazhatnánk az egyváltozós eset analógiájára:

$f : D \to \mathbb{R}^m$ kétszer differenciálható $\underline{a}$-ban, ha differenciálható $\underline{a}$ egy környezetében és a "deriváltja" differenciálható $\underline{a}$-ban. Mi is f deriváltja? $f' = \mathbf{J}_f$. Hogyan értelmezhetnénk egy ilyen mátrix értékű függvény differenciálhatóságát? Az eddigiekből világos, hogy a differenciálhatóság fogalmához, csak a vektortér és a norma fogalmát használtuk. Az $m \times n$-es mátrixok $\mathbb{R}^{m \times n}$ vektortérén természetes módon értelmezhető egy (bizonyos értelemben egyértelmű) norma: ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor legyen

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{\|\mathbf{A}\underline{v}\| : \underline{v} \in \mathbb{R}^n,\ \|\underline{v}\| \leq 1\}.$$

Egy ilyen $g : D \to \mathbb{R}^{m \times n}$ függvény (például f' az $\underline{a}$ egy környezetében) differenciálható $\underline{a} \in \text{int}(D)$-ben, ha létezik olyan $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \times n})$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{\|g(\underline{x}) - \big(g(\underline{a}) + \psi(\underline{x} - \underline{a})\big)\|}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0.$$

Persze felmerül a kérdés, hogy hogyan tovább? A háromszori differenciálhatósághoz értelmeznünk kéne az $f' = \mathbf{J}_f$ derivált függvényét (eddig csak a differenciálhatóságát értelmeztük). Ez is természetes módon megtehető, de ennek részleteire már nem térünk ki.

A lényeg, hogy a többváltozós többszöri differenciálhatóság fogalma, a látszólagos eltérések ellenére teljesen analóg az egyváltozós esettel.

Eddig minden példánkban $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ teljesült. Ez általába nem igaz, de "szép" függvényekre igen.

5.2. Tétel. (Young Tétel) *Ha* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $\underline{a} \in \text{int}(D)$*,* f *r-szer differenciálható* $\underline{a}$*-ban és* $(i_1, \ldots, i_r)$ *egy az* $1, \ldots, n$ *számokból álló tetszőleges sorozat,* $(j_1, \ldots, j_r)$ *ennek egy átrendezése, akkor*

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}}(\underline{a}) = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_r}}(\underline{a}).$$

Lokális szélsőérték

5.3. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $\underline{a} \in D$. Ekkor

- *f-nek $\underline{a}$-ban abszolút minimuma (maximuma)* van, ha minden $\underline{x} \in D$-re $f(\underline{a}) \le f(\underline{x})$ $(f(\underline{a}) \ge f(\underline{x}))$;
- *f-nek $\underline{a}$-ban szigorú abszolút minimuma (maximuma)* van, ha minden $\underline{x} \in D \backslash \{\underline{a}\}$-ra $f(\underline{a}) < f(\underline{x})$ $(f(\underline{a}) > f(\underline{x}))$.

f-nek $\underline{a}$ (szigorú) abszolút szélsőértékhelye, ha f-nek $\underline{a}$-ban (szigorú) abszolút minimuma vagy maximuma van.

Az egyváltozós esethez hasonlóan most sem az abszolút szélsőértékek vizsgálata az elsődleges célunk, hanem a lokálisaké.

5.4. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $\underline{a} \in D$. Ekkor

- *f-nek $\underline{a}$-ban lokális minimuma (maximuma)* van, ha létezik $\varepsilon > 0$, hogy minden $\underline{x} \in S(\underline{a}, \varepsilon) \cap D$-re $f(\underline{a}) \le f(\underline{x})$ $(f(\underline{a}) \ge f(\underline{x}))$;
- *f-nek $\underline{a}$-ban szigorú lokális minimuma (maximuma)* van, ha létezik $\varepsilon > 0$, hogy minden $\underline{x} \in \dot{S}(\underline{a}, \varepsilon) \cap D$-ra $f(\underline{a}) < f(\underline{x})$ $(f(\underline{a}) > f(\underline{x}))$.

f-nek $\underline{a}$ (szigorú) lokális szélsőértékhelye, ha f-nek $\underline{a}$-ban (szigorú) lokális minimuma vagy maximuma van.

Mindenek előtt differenciálható függvényekre megadjuk annak szükséges feltételét, hogy egy pont lokális szélsőértékhely legyen.

5.5. Tétel. *Ha* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $\underline{a} \in \text{int}(D)$ *lokális szélsőértékhelye f-nek és f differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor* $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$*, vagyis minden* $i = 1, \ldots, n$*-re* $f'_{x_i}(\underline{a}) = 0$*.*

Bizonyítás. Legyen $i = 1, \ldots, n$ tetszőleges. Ekkor a $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{e}_i)$ függvény 0-ban differenciálható és 0-ban lokális szélsőértéke van, így az ismert egyváltozós függvényekre vonatkozó tétel szerint $f'_{x_i}(\underline{a}) = g'(0) = 0$. □

Elégséges feltételt már nehezebb találni.

5.6. Definíció. Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in \text{int}(D)$ és f kétszer differenciálható $\underline{a}$-ban, akkor *f Hesse mátrixa $\underline{a}$-ban:*

$$\mathbf{H}_f(\underline{a}) = \mathbf{J}_{\text{grad} f}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(\underline{a}) & f''_{x_1 x_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_1 x_n}(\underline{a}) \\ f''_{x_2 x_1}(\underline{a}) & f''_{x_2 x_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_2 x_n}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n x_1}(\underline{a}) & f''_{x_n x_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_n x_n}(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

Az 5.2 Tétel szerint $\mathbf{H}_f(\underline{a})$ egy szimmetrikus mátrix. Most már kimondhatjuk a lokális szélsőértékhelyek elégséges feltételét. Bár nem látszik, de ez a tétel is egyváltozós megfelelőjének analógiája, de ezt nem részletezzük. A tételt nem bizonyítjuk.

5.7. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$, f 2-szer differenciálható $\underline{a}$-ban,* $\mathrm{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ *és a $\mathbf{H}_f(\underline{a})$ Hesse mátrix sarokdeterminánsaiból álló:*

$$f''_{x_1x_1}(\underline{a}), \ldots, \det \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(\underline{a}) & f''_{x_1x_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_1x_k}(\underline{a}) \\ f''_{x_2x_1}(\underline{a}) & f''_{x_2x_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_2x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_kx_1}(\underline{a}) & f''_{x_kx_2}(\underline{a}) & \ldots & f''_{x_kx_k}(\underline{a}) \end{pmatrix}, \ldots, \det \mathbf{H}_f(\underline{a})$$

sorozat tagja pozitívak, akkor f-nek $\underline{a}$-ban szigorú lokális minimuma van; ha váltakozva negatív-pozitívak, akkor f-nek $\underline{a}$-ban szigorú lokális maximuma van.

A következő tétel a kétváltozós esetben nyújt segítséget annak megállapításában, hogy egy pontban nincsen lokális szélsőértéke egy függvénynek. Ezt sem bizonyítjuk.

5.8. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in \mathrm{int}(D)$, f 2-szer differenciálható $\underline{a}$-ban és $\det \mathbf{H}_f(\underline{a}) < 0$, akkor f-nek $\underline{a}$-ban nincsen lokális szélsőértéke.*

Lássunk egy példát: Keressük meg az $f(x, y) = (x^2+y^2-1)^2 - 6x^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit. f tetszőlegesen sokszor differenciálható.

Szükséges feltétel: Ha f-nek egy pont lokális szélsőértékhelye, akkor ott a minden parciális deriváltja 0:

$$f'_x = 2(x^2 + y^2 - 1)2x - 12x = 0,$$

$$f'_y = 2(x^2 + y^2 - 1)2y = 0.$$

Ennek megoldásai: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, -1)$, $P_4 = (2, 0)$, $P_5 = (-2, 0)$.

Elégséges feltétel: Ezekben a pontokban kell megvizsgálnunk f Hesse mátrixát: $f''_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 16$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 8xy$, $f''_{yy} = 4x^2 + 12y^2 - 4$. Amiből:

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 16 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{H}_f$-be hellyetesítve a kapott pontokat:

$$\mathbf{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

sarokdeterminánsai: $-16 < 0$, $(-16)(-4)-0 = 64 > 0$, így f-nek P_1-ben szigorú lokális maximuma van.

$$\mathbf{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

sarokdeterminánsai: -12, $-96 < 0$, így f-nek P_2 nem lokális szélsőértékhelye.

$$\mathbf{H}_f(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

megegyezik $\mathbf{H}_f(P_2)$-vel, vagyis f-nek P_3 sem lokális szélsőértékhelye.

$$\mathbf{H}_f(P_4) = \mathbf{H}_f(P_5) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

sarokdeterminánsai: $32 > 0$, $384 > 0$, így f-nek P_4-ben és P_5-ben szigorú lokális minimuma van.

5.9. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^4 + y^2 - 32x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

5.10. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2y^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

5.11. Házi feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2(x + 1)^3$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

5.12. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = xy$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit az origó középű 1 sugarú zárt körlapon.

5.13. Feladat. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 50$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ csúcsú négyzetlapon.

Inverz- és Implicitfüggvény Tétel

Ebben a részben a valós analízis két rendkívül fontos tételét mondjuk ki bizonyítás nélkül. Motivációként az egyváltozós esetet bebizonyítjuk. Többváltozós esetben csak a tételek megértése a cél.

5.14. Definíció. Ha $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor egy $f : X \to Y$ függvény *homeomorfizmus*, ha f folytonos bijekció és f^{-1} is folytonos. Ha létezik $f : X \to Y$ homeomorfizmus, akkor X és Y *homeomorf.*

Szemléletesen egy homeomorfizmus megfelel a halmaz egy "szakítás nélküli átformálásának". Nagyon felszínesen ez annyit jelent, hogy "X gumiból van és nyújthatjuk, összenyomhatjuk, stb, csak el nem szakíthatjuk".

Például bármely két nemüres nyílt intervallum, általában bármely két n-dimenziós nyílt gömbhomeomorf (eltolás és nyújtás).

5.15. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $(0, 1)$ homeomorf $\mathbb{R}$-el.

5.16. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely nyílt körlap homeomorf bármely nyílt téglalappal illetve nyílt elipszissel.

A homeomrfizmus fogalma, bár szemléletes, egyáltalán nem triviális! Például "világos", hogy $\mathbb{R}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^2$-el, általában ha $n \neq m$, akkor $\mathbb{R}^n$ nem homeomorf $\mathbb{R}^m$-el. Az $n = 1$, $m = 2$ eset könnyen bizonyítható, az általános eset ellenben meglepően komoly eszközöket igényel.

Rátérünk a fejezet elején említett tételekre.

5.17. Tétel. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$, akkor léteznek $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy $f : U \to V$ homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor f' a-beli folytonossága miatt létezik $\varepsilon > 0$, hogy f' az $U = S(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ halmaz minden pontjában pozitív, így f szigorúan monoton nő U-n. f folytonossága és szigorú növekedése miatt $V = f(U)$ egy nyílt intervallum. Ismert, hogy ekkor f^{-1} is folytonos V-n. □

Az 5.17 Tétel többdimenziós megfelelője is igaz, azonban bizonyítása lényegesen bonyolultabb, elhagyjuk.

5.18. Tétel. (Inverzfüggvény Tétel) *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $\underline{a} \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ egy $\underline{a}$-ban folytonosan differenciálható függvény és* $\det \mathbf{J}_f(\underline{a}) \neq 0$*, akkor léteznek $\underline{a} \in U$ és $f(\underline{a}) \in V$ nyílt halmazok, hogy $f : U \to V$ homeomorfizmus.*

Megjegyezzük, hogy ennél valójában több igaz. Nevezetesen, hogy olyan U és V is van, amikre $f : U \to V$ differenciálható bijekció és f^{-1} is differenciálható, és ekkor minden $\underline{y} \in V$-re $\mathbf{J}_{f^{-1}}(\underline{y}) = \mathbf{J}_f^{-1}(f^{-1}(\underline{y}))$ (inverz függvény deriváltja).

5.19. Tétel. (Implicitfüggvény Tétel, kétdimenziós eset) *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, $(a, b) \in D$, $g : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható (a, b)-ben, $g(a, b) = 0$, továbbá $g'_y(a, b) \neq 0$, akkor a $g(x, f(x)) = 0$, $f(a) = b$ függvényegyenlet lokálisan egyértelműen megoldható:*

Léteznek $a \in U$ és $b \in V$ nyílt halmazok és egy egyértelmű $f : U \to V$ differenciálható függvény, melyre $(x, y) \in U \times V$ esetén $g(x, y) = 0$ pontosan akkor, ha $f(x) = y$.

A tételek szemléletes magyarázatát a gyakorlaton részletezzük.

6. Mérték és integrál

Jordan-mérték

Ebben a részben bevezetjük a "precíz" hosszúság, terület és térfogat fogalmát. Közös általánosításukat, az n-dimenziós Jordan-mértéket fogjuk definiálni.

6.1. Definíció. Adott $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ valós számok esetén a

$$T = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall\, i\ a_i \leq x_i \leq b_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmazt *n-dimenziós téglának* nevezzük. Egy ilyen T *térfogata:*

$$\mathrm{V}(T) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Vegyük észre, hogy $n = 1, 2, 3$ esetben pont egy szakasz ("szokásos") hosszát, egy téglalap területét, illetve egy téglatest térfogatát adja a definíció.

6.2. Feladat. Bizonyítsa be, hogy $\operatorname{int}\left(\bigtimes_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\right) = \bigtimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$.

6.3. Definíció. Adott $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazok *nem lógnak egymásba*, ha $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \emptyset$.

6.4. Definíció. Adott $X \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz *belső mértéke*, jelölésben $\mathsf{b}(X)$, a legkisebb felső korlátja a $\mathrm{V}(T_1) + \cdots + \mathrm{V}(T_k)$ alakú véges összegeknek, ahol a T_i-k páronként egymásba nem lógó n-dimenziós X-beli téglák, vagyis

$$\mathsf{b}(X) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}(T_i) : k \in \mathbb{N},\ i \neq j \Rightarrow \operatorname{int}(T_i) \cap \operatorname{int}(T_j) = \emptyset,\ \bigcup_{i=1}^{k} T_i \subseteq X\Big\}.$$

Az X *külső mértéke*, jelölésben $\mathsf{k}(X)$, a legnagyobb alsó korlátja a $\mathrm{V}(T_1) + \cdots + \mathrm{V}(T_k)$ alakú véges összegeknek, ahol a T_i-k n-dimenziós téglák, amikre $X \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_k$, vagyis

$$\mathsf{k}(X) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}(T_i) : k \in \mathbb{N},\ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} T_i\Big\}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathsf{b}(\emptyset) = \mathsf{k}(\emptyset) = 0$, ugyanis az üres összeg definíció szerint 0, a külső mértékre vonatkozó állítás pedig triviális, mert akármilyen kicsi tégla fedi az üres halmazt.

A következő állítás szemléletes, ennek ellenére bizonyítása elég technikai, így elhagyjuk.

6.5. Állítás. *Minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $\mathsf{b}(X) \leq \mathsf{k}(X)$.*

6.6. Definíció. Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz *Jordan-mérhető*, ha $\mathsf{b}(X) = \mathsf{k}(X)$. Jelölje λ_n az n-dimenziós *Jordan-mértéket*, vagyis ha X Jordan-mérhető, akkor $\lambda_n(X) = \mathsf{b}(X) = \mathsf{k}(X)$.

Világos, hogy minden $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmazokra $\mathsf{b}(Y) \leq \mathsf{b}(X)$ és $\mathsf{k}(Y) \leq \mathsf{k}(X)$, így ha mindkét halmaz Jordan-mérhető, akkor $\lambda_n(Y) \leq \lambda_n(X)$.

Mindenek előtt lássunk egy példát nem Jordan-mérhető halmazra: $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ vagy általában

$$X^n = \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big)^n = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \forall\, i\ x_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Miért? Világos, hogy X csak elfajult, vagyis 0 területű téglát tartalmazhat, hiszen minden nemüres nyílt intervallum tartalmaz irracionális számot, így nem lehet része X-nek. Tehát $\mathsf{b}(X) = 0$.

Belátjuk $\mathsf{k}(X) = 1$. $\mathsf{k}(X) \leq 1$ triviális ($T_1 = [0,1]$ fedéssel). Legyenek $T_1, \ldots, T_k$ téglák $\mathbb{R}$-ben, vagyis zárt intervallumok, melyekre $X \subseteq \bigcup_{i=1}^k T_i$. Ekkor $(0,1) \setminus \bigcup_{i=1}^k T_i$ egy nyílt halmaz, ami csak üres lehet, különben tartalmazna racionális számot. Azt kaptuk tehát, hogy $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^k T_i$, amiből már következik, hogy $\sum_{i=1}^k \mathrm{V}(T_i) \geq 1$. Mivel ez X minden téglákkal való véges fedésére fennáll, ezért $\mathsf{k}(X) \geq 1$.

A következő állítás szerint a 6.6 Definíció jó általánosítása szemléletes fogalmainknak.

6.7. Állítás. *Minden $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla Jordan-mérhető, és $\lambda_n(T) = \mathrm{V}(T)$.*

Bizonyítás. A T belső mértékének definíciójában $\mathrm{V}(T)$ is eleme annak a halmaznak, aminek a supremumát vesszük, amiből $\mathrm{V}(T) \leq \mathsf{b}(T)$. Hasonlóan T külső mértékének definíciójában $\mathrm{V}(T)$ eleme annak halmaznak, aminek az infimumát vesszük, így $\mathsf{k}(T) \leq \mathrm{V}(T)$. Azt kaptuk, hogy

$$\mathsf{k}(T) \leq \mathrm{V}(T) \leq \mathsf{b}(T),$$

és tudjuk, hogy $\mathsf{b}(T) \leq \mathsf{k}(T)$, vagyis $\lambda_n(T) = \mathsf{b}(T) = \mathsf{k}(T) = \mathrm{V}(T)$. □

Megjegyezzük, hogy mint azt később látni fogjuk, a klasszikus geometriai alakzatok, úgy mint gömb, elipszoid, kúp, vagy a poliéderek mind Jordan-mérhetők és mértékük megegyezik az ismert képlettel.

A továbbiakban felsoroljuk a Jordan-mérték egy-két tulajdonságát.

6.8. Állítás. *Ha $A_1, \ldots, A_k$ és $A \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmazok és $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i$, akkor*

$$\mathsf{k}(A) \leq \sum_{i=1}^k \mathsf{k}(A_i).$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és minden $i = 1, \ldots, k$-ra $T_{i1}, \ldots, T_{ik_i}$ téglák, amikre

$$A_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_i} T_{ij} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{k_i} \mathrm{V}(T_{ij}) < \mathsf{k}(A_i) + \frac{\varepsilon}{k}.$$

Ekkor $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{k_i} T_{ij}$ és

$$\mathsf{k}(A) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} \mathrm{V}(T_{ij}) < \sum_{i=1}^k \big(\mathsf{k}(A_i) + \frac{\varepsilon}{k}\big) = \sum_{i=1}^k \mathsf{k}(A_i) + \varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, kapjuk hogy $\mathsf{k}(A) \leq \sum_{i=1}^k \mathsf{k}(A_i)$. □

Az 6.8 Állítás "dulisa" a következő, mely teljesen hasonlóan látható be.

6.9. Állítás. *Ha $A_1, \dots, A_k$ páronként egymásba nem lógó és $A \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmazok, továbbá $\bigcup_{i=1}^k A_i \subseteq A$, akkor*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathsf{b}(A_i) \leq \mathsf{b}(A).$$

6.10. Tétel. *Ha $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ páronként egymásba nem lógó Jordan-mérhető halmazok, akkor $\bigcup_{i=1}^k A_i$ is Jordan-mérhető és*

$$\lambda_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(A_i).$$

Bizonyítás. Az 6.8 és 6.9 Állításokat alkalmazva $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$-ra, kapjuk hogy

$$\mathsf{k}(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{k}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{b}(A_i) \leq \mathsf{b}(A).$$

Tehát a mindig teljesülő $\mathsf{b}(A) \leq \mathsf{k}(A)$ miatt $\mathsf{b}(A) = \mathsf{k}(A)$, vagyis A Jordan-mérhető és $\lambda_n(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_n(A_i)$. □

A következő állítás triviális a definíciókból.

6.11. Állítás. *Minden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra a következők ekvivalansek:*

(i) *A Jordan-mérhető és $\lambda_n(A) = 0$,*

(ii) $\mathsf{k}(A) = 0$,

(iii) *minden $\varepsilon > 0$-hoz léteznek $T_1, \dots, T_k$ téglák, amikre*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^k T_i \text{ és } \sum_{i=1}^k \mathrm{V}(T_i) < \varepsilon.$$

6.12. Következmény. *(a) Minden véges halmaz 0 Jordan-mértékű. (b) Egy 0 Jordan-mértékű halmaz minden része is 0 Jordan-mértékű. (c) Véges sok 0 Jordan-mértékű halmaz uniója is 0 Jordan-mértékű.*

A következő nagyon fontos tétel szükséges és elégséges feltételt ad egy halmaz Jordan-mérhetőségére. Bizonyítása elég hosszadalmas, így elhagyjuk. Szemléletesen arról van szó, hogy egy korlátos halmaz Jordan-mérhetőségénél csak a határpontok okozhatnak problémát.

6.13. Tétel. *Egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha ∂A Jordan-mérhető és $\lambda_n(\partial A) = 0$, vagyis ha $\mathsf{k}(\partial A) = 0$.*

Az 6.13 Tétel következményeként kapjuk a Jordan-mérhető halmazok következő fontos tulajdonságát.

6.14. Tétel. *Ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmazok, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ is Jordan-mérhető.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy elég megmutatnunk $A \backslash B$ Jordan-mérhetőségét, abból már következik a metszetre és unióra vonatkozó állítás. Valóban: $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$, vagyis a metszet kifejezhető a különbséggel és $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, ahol a második unió már egymásba nem lógó Jordan-mérhető halmazok uniója, így alkalmazható az 6.10 Tétel.

Belátjuk, hogy tetszőleges $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazokra

$$\partial(A \backslash B) \subseteq \partial A \cup \partial B.$$

Ez elég, mivel null-mértékű halmazok uniója és egy null-mértékű halmaz tetszőleges része is triviálisan null-mértékű.

Ha $\underline{x} \in \partial(A \backslash B)$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, hogy

$$S(\underline{x}, \varepsilon) \cap (A \backslash B) \neq \emptyset \text{ és } S(\underline{x}, \varepsilon) \backslash (A \backslash B) \neq \emptyset.$$

Az első feltételből speciálisan az is következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra

(1a) $S(\underline{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

(1b) $S(\underline{x}, \varepsilon) \backslash B \neq \emptyset$.

A második feltételt kicsit átalakítjuk:

$$S(\underline{x}, \varepsilon) \backslash (A \backslash B) = S(\underline{x}, \varepsilon) \cap \big(\mathbb{R}^n \backslash (A \backslash B)\big) = S(\underline{x}, \varepsilon) \cap \big((\mathbb{R}^n \backslash A) \cup B\big) =$$

$$\big(S(\underline{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \backslash A)\big) \cup \big(S(\underline{x}, \varepsilon) \cap B\big) = \big(S(\underline{x}, \varepsilon) \backslash A\big) \cup \big(S(\underline{x}, \varepsilon) \cap B\big) \neq \emptyset$$

Ebből könnyen látható, hogy vagy minden $\varepsilon > 0$-ra $S(\underline{x}, \varepsilon) \backslash A \neq \emptyset$ vagy minden $\varepsilon > 0$-ra $S(\underline{x}, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.

Az első esetben (1a) miatt $\underline{x} \in \partial A$.

A második esetben (1b) miatt $\underline{x} \in \partial B$. □

6.15. Következmény. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, akkor $\mathrm{int}(A)$ is Jordan-mérhető, továbbá $\lambda_n(A) = \lambda_n(\mathrm{int}(A))$.*

Bizonyítás. Mivel A Jordan-mérhető, ezért a 6.13 Tétel szerint ∂A is az és $\lambda_n(\partial A) = 0$, így az előző tétel szerint $\mathrm{int}(A) = A \backslash \partial A$ is Jordan-mérhető. Továbbá az 1.22 Feladat szerint $\mathrm{int}(A) \cap \partial A = \emptyset$ és $A \subseteq \mathrm{int}(A) \cup \partial A$, így $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(\mathrm{int}(A) \cup \partial A) = \lambda_n(\mathrm{int}(A)) + \lambda_n(\partial A) = \lambda_n(\mathrm{int}(A))$. A fordított egyenlőtlenség trviális, hiszen $\mathrm{int}(A) \subseteq A$. □

Fontos megjegyeznünk, hogy nem minden korlátos nyílt (zárt) halmaz Jordan-mérhető, de erre csak kissé bonyolult példát tudnánk adni, így eltekintünk tőle.

Kimondunk még egy fontos tételt, mely informálisan azt fejezi ki, hogy "a tér dimenziójánál kisebb dimenziós dolog nulla Jordan-mértékű".

6.16. Tétel. *Ha $n < m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : D \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható korlátos függvény, akkor $\lambda_m(\mathrm{ran}(f)) = 0$.*

Tehát például minden klasszikus görbe a síkon vagy a térben, illetve minden klasszikus felület a térben 0 Jordan-mértékű, hiszen ezeket folytonosan differenciálható függvények képeként kapjuk.

Összefoglalás:

- A Jordan-mérhető halmazok osztálya része a korlátos halmazok osztályának.
- A Jordan-mérhető halmazok osztálya zárt (véges) unióra, (véges) metszetre és különbségre.
- Egymásba nem lógó Jordan-mérhető halmazok uniójának mértéke megegyezik a halmazok mértékének az összegével.
- Jordan-mérhető halmaz belseje is Jordan-mérhető.
- Nem minden korlátos, de még csak nem is minden korlátos nyílt (zárt) halmaz Jordan-mérhető.

Riemann-integrál

Ebben a részben általánosítjuk az egyváltozós Riemann-integrált többváltozós függvényekre.

6.17. Definíció. Egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *átmérője:*

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in A\} = \sup\{\|\underline{x} - \underline{y}\| : \underline{x}, \underline{y} \in A\}.$$

6.18. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{diam}\Big(\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\Big) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

6.19. Definíció. Adott $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla *felosztásán* egy $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ véges, páronként egymásba nem lógó téglákból álló halmazt értünk, amire $T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$. A felosztás *finomsága* a felosztásban szereplő téglák átmérőjének a maximuma.

6.20. Definíció. Adott $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla és T-nek egy $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ felosztása. Egy $\mathcal{R} = \{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *reprezentáns rendszer $\mathcal{F}$-en*, ha minden $i = 1, \ldots, k$-ra $\underline{p}_i \in T_i$.

6.21. Definíció. Ha $T \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tégla, $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ egy felosztása T-nek, $\mathcal{R} = \{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_k\}$ reprezentáns rendszer $\mathcal{F}$-en és $f : T \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, akkor az *f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz és $\mathcal{R}$ reprezentáns rendszerhez tartozó integrál közelítő összege:*

$$\sigma(f, \mathcal{F}, \mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) f(\underline{p}_i).$$

6.22. Definíció. Adott $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén *f Riemann-integrálható (T-n)*, ha létezik $I \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy T minden δ-nál finomabb $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ felosztására és $\mathcal{R} = \{\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_k\}$ reprezentáns rendszerre $\mathcal{F}$-en

$$|\sigma(f, \mathcal{X}, \mathcal{P}) - I| < \varepsilon.$$

Ekkor I-t *f Riemann-integráljának* nevezzük, jelölésben $I = \int_T f$.

6.23. Tétel. *Adott $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén f pontosan akkor Riemann-integrálható T-n és $\int_T f = I$, ha T minden végtelenül finomodó $\mathcal{F}_k$ felosztás sorozatára ("$\mathcal{F}_k$ finomsága"$\to 0$) és hozzá tartozó $\mathcal{R}_k$ reprezentáns rendszerre*

$$\sigma(f, \mathcal{F}_k, \mathcal{R}_k) \to I.$$

Bizonyítás. Ha $\int_T f = I$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy T minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztására és azon adott $\mathcal{R}$ reprezentáns rendszerre $|\sigma(f, \mathcal{X}, \mathcal{P}) - I| < \varepsilon$. Legyen $k_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k \geq k_0$-ra $\mathcal{F}_k$ finomsága kisebb, mint δ. Ekkor $|\sigma(f, \mathcal{F}_k, \mathcal{R}_k) - I| < \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\sigma(f, \mathcal{F}_k, \mathcal{R}_k) \to I$.

Fordítva: Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\varepsilon > 0$, amihez nincsen megfelelő $\delta > 0$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re $\delta = \frac{1}{k}$ sem jó, vagyis létezik T-nek egy $\frac{1}{k}$-nál finomabb $\mathcal{F}_k$ felosztása és azon egy $\mathcal{R}_k$ reprezentáns rendszer, hogy $|\sigma(f, \mathcal{F}_k, \mathcal{R}_k) - I| \geq \varepsilon$. Ellentmondás, mert $\mathcal{F}_k$ finomsága 0-hoz tart. □

6.24. Következmény. *Adott $T \subseteq \mathbb{R}^n$ tégla és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén f pontosan akkor Riemann-integrálható T-n, ha T minden végtelenül finomodó $\mathcal{F}_k$ felosztás sorozatára és hozzá tartozó $\mathcal{R}_k$ reprezentáns rendszerre a $\sigma(f, \mathcal{F}_k, \mathcal{R}_k)$ sorozat konvergens.*

A Riemann-integrál fogalmát máshonnan is megközelíthetjük, akárcsak egyváltozós függvények esetében.

6.25. Definíció. Ha $T \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tégla és $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ egy felosztása T-nek, továbbá $f : T \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, akkor az *f függvény $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó alsó integrál közelítő összege:*

$$s(f, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\};$$

f (Darboux-féle) alsó integrálja:

$$s(f) = \sup\{s(f, \mathcal{F}) : \mathcal{F} \textit{ egy felsosztása } T\textit{-nek}\};$$

felső integrál közelítő összege:

$$S(f, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\};$$

f (Darboux-féle) felső integrálja:

$$S(f) = \inf\{S(f, \mathcal{F}) : \mathcal{F} \textit{ egy felsosztása } T\textit{-nek}\}.$$

6.26. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $T \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tégla és $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ egy felosztása T-nek, továbbá $f : T \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, akkor

$$s(f, \mathcal{F}) = \inf\{\sigma(f, \mathcal{F}, \mathcal{R}) : \mathcal{R} \textit{ egy reprezentáns rendszer } \mathcal{F}\textit{-en}\},$$

$$S(f, \mathcal{F}) = \sup\{\sigma(f, \mathcal{F}, \mathcal{R}) : \mathcal{R} \textit{ egy reprezentáns rendszer } \mathcal{F}\textit{-en}\}.$$

Világos, hogy $s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{F})$ mindig teljesül. Az is belátható, hogy minden $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felosztás esetén is igaz $s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{G})$, amiből már következik, hogy $s(f) \le S(f)$. A következő tétel a Riemann-integrálhatóságra ad néhány szükséges és elégséges feltételt.

6.27. Tétel. *Ha $T \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tégla és $f : T \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, akkor következő állítások ekvivalensek:*

(i) *f Riemann-integrálható T-n (és $\int_T f = I$).*

(ii) *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztásra*

$$|S(f,\mathcal{F}) - s(f,\mathcal{F})| < \varepsilon \ \Big(|s(f,\mathcal{F}) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{és}\ |S(f,\mathcal{F}) - I) < \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

(iii) *Minden $\mathcal{F}_k$ végtelenül finomodó felosztás sorozatra*

$$S(f,\mathcal{F}_k) - s(f,\mathcal{F}_k) \to 0 \ \ (s(f,\mathcal{F}_k) \to I \ \text{ és }\ S(f,\mathcal{F}_k) \to I).$$

(iv) *$s(f) = S(f)(= I)$.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii): Legyen $\int_T f = I$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik egy $\delta > 0$, hogy T minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztására és azon adott $\mathcal{R}$ reprezentáns rendszerre $|\sigma(f,\mathcal{F},\mathcal{R}) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$, vagyis $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(f,\mathcal{F},\mathcal{R}) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. A 6.26 Feladat szerint ez kisebb-egyenlővel $s(f,\mathcal{F})$-re és $S(f,\mathcal{F})$-re is teljesül:

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{F}) \le I + \frac{\varepsilon}{3},$$

vagyis $|s(f,\mathcal{F}) - I| \le \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|S(f,\mathcal{F}) - I| \le \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebből természetesen már következik, hogy $|S(f,\mathcal{F}) - s(f,\mathcal{F})| < \varepsilon$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Ha $s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{F})$ tetszőlegesen közel lehet egymáshoz, akkor az előbbiek supremuma $s(f)$ egyenlő az utóbbiak infimumával $S(f)$-el. (Itt most felhasználtuk, hogy minden $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ felosztásra $s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{G})$.) Legyen ez a közös érték I. Ekkor természetesen minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztásra $|s(f,\mathcal{F}) - I| < \varepsilon$ és $|S(f,\mathcal{F}) - I) < \varepsilon$, vagyis

$$I - \varepsilon < s(f,\mathcal{F}) \le S(f,\mathcal{F}) < I + \varepsilon. \tag{$*$}$$

Belátjuk, hogy $\int_T f = I$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez válasszunk egy $\delta > 0$-t, hogy minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztásra fennálljon $(*)$. Ekkor ha $\mathcal{R}$ egy reprezentáns rendszer $\mathcal{F}$-en, akkor $s(f,\mathcal{F}) \le \sigma(f,\mathcal{F},\mathcal{R}) \le S(f,\mathcal{F},\mathcal{R})$, így $|\sigma(f,\mathcal{F},\mathcal{R}) - I| < \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, ezért $\int_T f = I$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii): Mint a 6.23 Tétel bizonyítása.

(ii)$\Rightarrow$(iv): Triviális.

(iv)$\Rightarrow$(ii): Nem bizonyítjuk. $\square$

Természetesen nem csak téglákon tudunk integrálni.

6.28. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen továbbá T tetszőleges A-t tartalmazó tégla és $g : T \to \mathbb{R}$ a következő függvény

$$g(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{ha } \underline{x} \in A \\ 0, & \text{ha } \underline{x} \notin A \end{cases}$$

Ekkor f *Riemann-integrálható* A*-n*, ha g Riemann-integrálható T-n, és ekkor legyen $\int_A f = \int_T g$.

Könnyen meggondolható, hogy a definíció értelmes, vagyis nem függ a tégla választásától.

6.29. Megjegyzés. Megtehettük volna, hogy a Riemann-integrálhatóságot Jordan-mérhető halmazokon értelmezett korlátos függvényekre definiáljuk a halmaz Jordan-mérhető darabokra való felosztásainak segítségével. Meggondolható, hogy ez az eljárás ugyanazt a fogalmat adta volna.

Riemann-integrálható függvények

Mostantól függvények Riemann-integrálhatóságával és a Riemann-integrálható függvények tulajdonságaival foglalkozunk.

6.30. Tétel. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ egy korlátos folytonos függvény, akkor f Riemann-integrálható A-n.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért csak $T = A$ téglára látjuk be az állítást.

Belátjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy T minden δ-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztására $|S(f, \mathcal{F}) - s(f, \mathcal{F})| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A 3.28 Heine Tétel szerint f egyenletesen folytonos T-n, így létezik $\delta > 0$, hogy

$$\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in T\ \left(\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \frac{\varepsilon}{2\lambda_n(T)}\right).$$

Legyen $\mathcal{F} = \{T_1, \ldots, T_k\}$ egy δ-nál finomabb felosztása T-nek. Ekkor

$$0 \leq S(f, \mathcal{X}) - s(f, \mathcal{X}) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \big(\sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} - \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\}\big).$$

Belátjuk, hogy

$$\sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} - \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} = \sup\{f(\underline{x}) - f(\underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in T_i\}.$$

Jelölje B a bal oldalt, J a jobb oldalt.

$J \leq B$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in T_i$, akkor $f(\underline{x}) \leq \sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\}$ és $f(\underline{y}) \geq \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\}$, így $f(\underline{x}) - f(\underline{y}) \leq B$. Tehát ezen értékek supremuma, vagyis J kisebb-egyenlő, mint B.

$B \leq J$: Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in T_i$ olyanok, hogy $f(\underline{x}) > \sup\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} - \frac{\varepsilon}{2}$ és $f(\underline{y}) < \inf\{f(\underline{x}) : \underline{x} \in T_i\} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $B - \varepsilon < f(\underline{x}) - f(\underline{y}) \leq J$ Mivel ez minden ε-ra fennáll, ezért $B \leq J$.

Tudjuk továbbá, hogy a megfelelően kis átmérőjű T_i-k választása miatt $\sup\{f(\underline{x}) - f(\underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in T_i\} \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_n(T)}$, így

$$S(f, \mathcal{F}) - s(f, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \sup\{f(\underline{x}) - f(\underline{y}) : \underline{x}, \underline{y} \in T_i\} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) \frac{\varepsilon}{2\lambda_n(T)} = \frac{\varepsilon}{2\lambda_n(T)} \sum_{i=1}^{k} \lambda_n(T_i) = \frac{\varepsilon}{2\lambda_n(T)} \lambda_n(T) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

A következő tétel könnyen meggondolható az eddigiek alapján.

6.31. Tétel. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz, f és g Riemann-integrálható A-n és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $f+g$ és λf is Riemann-integrálható A-n és $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$, $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$.*

A következő tétel Jordan-mérhető halmazok helyett téglákra könnyen belátható.

6.32. Tétel. *Ha $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ páronként egymásba nem lógó Jordan-mérhető halmazok és f Riemann-integrálható mindegyikükön, akkor f Riemann-integrálható az $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ halmazon is és $\int_A f = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f$.*

A következő tétel bizonyítása elég technikai, ezért elhagyjuk.

6.33. Tétel. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz, f és g Riemann-integrálható A-n, akkor $|f|$ és fg is Riemann-integrálható A-n, továbbá, ha $\inf\{g(\underline{x}) : \underline{x} \in A\} > 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható A-n.*

Hogyan becsülhető egy integrál értéke? A következő állítás könnyen meggondolható a definíciókból.

6.34. Állítás. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, $f, g : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények és $f \leq g$ A-n, akkor $\int_A f \leq \int_A g$. Hasonlóan ha $m \leq f \leq M$ az A-n, akkor $m\lambda_n(A) \leq \int_A f \leq M\lambda_n(A)$. Továbbá $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.*

6.35. Következmény. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz és $\lambda_n(A) = 0$, akkor minden $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható A-n és $\int_A f = 0$.*

Az Riemann-integrál és a Jordan-mérték egy fontos kapcsolatát mutatja a következő tétel, melynek a térfogatszámításban komoly szerepe van. Valójában az egyváltozós esetben megismert, a függvény alatti terület és az integrál kapcsolatát kimondó tételt általánosítja.

6.36. Tétel. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető, $f : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $f \geq 0$ az A-n, akkor a $\Gamma_f = \{(\underline{x}, y) : \underline{x} \in A \text{ és } 0 \leq y \leq f(\underline{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz Jordan-mérhető és $\lambda_{n+1}(\Gamma_f) = \int_A f$.*

Bizonyítás. Csak azt kell észrevennünk, hogy az $s(f, \mathcal{F})$ alakú számok benne vannak abban a halmazban, melynek supremuma $\mathsf{b}(\Gamma_f)$, vagyis $s(f) \leq \mathsf{b}(\Gamma_f)$. Hasonlóan $\mathsf{k}(\Gamma_f) \leq S(f)$. Mivel a függvény Riemann-integrálható, ezért $\int_A f = s(f) = S(f)$, így $\mathsf{b}(\Gamma_f) = \mathsf{k}(\Gamma_f)$, vagyis Γ_f Jordan-mérhető és $\lambda_{n+1}(\Gamma_f) = \int_A f$. □

Konkrét integrálok kiszámításában alapvető fontosságú a következő tétel, melyet csak 2 dimenzióban mondunk ki, de értelemszerűen általánosítható több dimenzióra is. Megjegyezzük, hogy fix dimenzió és konkrét feladat esetén annyi integráljelet teszünk amennyi a dimenzió és kiírjuk az integrál végére a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ldots$-ot.

6.37. Tétel. (Fubini Tétel) *Ha $T = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ egy téglalap, $f : T \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény és minden rögzített $x \in [a, b]$-re $f(x, y)$ Riemann-integrálható $[c, d]$-n, akkor az x-től függő $\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n és*

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x.$$

Például, ha a függvény folytonos a téglán, akkor teljesülnek a tétel kissé hosszadalmas feltételei. Azért mondtuk ki ebben a bonyolult formában, mert mikor nem téglán integrálunk, akkor a függvényt tipikusan nem folytonosan terjesztjük ki egy téglára. Ezzel persze nem fogunk minden feladatban külön foglalkozni, világos lesz a számolásból.

Lássunk egy-két példát:

1.) $\iint_T x^2y - \frac{x}{y+3} + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol $T = [-2,1] \times [0, \frac{1}{2}]$. Mivel a függvény folytonos T-n, ezért alkalmazzuk az előző tételt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-2}^{1} x^2y - \frac{x}{y+3} + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big[\frac{x^3y}{3} - \frac{x^2}{2y+6} + 2x\Big]_{-2}^{1}\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{y}{3} - \frac{1}{2y+6} + 2\Big) - \Big(\frac{-8y}{3} - \frac{4}{2y+6} - 4\Big)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 3y + \frac{3}{2y+6} + 6dy = \Big[\frac{3y^2}{2} + \frac{3\ln(2y+6)}{2} + 6y\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\Big(\frac{3}{8} + \frac{3\ln(7)}{2} + 3\Big) - \Big(0 + \frac{3\ln(6)}{2} + 0\Big) = \frac{3}{8} + \frac{3}{2}\ln\Big(\frac{7}{6}\Big).$$

2.) $\iint_A \frac{x+y}{x^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$.

Ismét az előző tételt alkalmazzuk, mert útközben úgyis kiderül, hogy Riemann-integrálhatók-e a függvények. Természetesen az integrálok határai is értelemszerűek lesznek, hiszen ha kiterjesztjük f-et egy téglára, akkor az A-n kívüli részen úgyis 0 az integrál.

$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^x \frac{x+y}{x^2+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\Big[x - \mathrm{arctg}(x)\Big]_0^1 =$$

$$\frac{3}{2}\big((1 - \frac{\pi}{4}) - (0-0)\big) = \frac{3(4-\pi)}{8}.$$

3.) Mi az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és az $x+y+z = 1$ síkok által határolt tetraéder térfogata? A 6.36 Tételt fogjuk alkalmazni. Könnyen meggondolható, hogy a tetraéder nem más, mint a 2.) feladat A halmazán értelmezett $f(x,y) = 1-x-y$ függvény alatti alakzat, vagyis a keresett térfogat: $\iint_A 1 - x - y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6.38. Feladat. Fejezze be a 3.) példát.

4.) $\iint_A \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}$.

Első próbálkozás: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Ez elég problémás így, a $\frac{\sin(y)}{y}$ függvénynek nem tudjuk a primitív függvényét.

Második próbákozás:

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\sin(y)}{y}y\mathrm{d}y = \big[-\cos(y)\big]_0^1 = -\cos(1) + 1.$$

5.) $\iiint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$, ahol $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2+y^2 \le 1\}$.

$$\iiint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy(x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3y^2}{2}+\frac{xy^4}{4}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}x = 0.$$

6.39. Feladat. $\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$, ahol A az $x+3$ és az x^2+1 függvények által határolt tartomány.

6.40. Feladat. $\iint_A e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$, ahol A a $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ csúcsú háromszöglap.

6.41. Feladat. Számolja ki az m magasságú a oldalú szabályos négyzet alapú gúla térfogatát. (Ötlet: Alkalmazza a 6.36 Tételt).

Helyettesítéses integrál

A következő tétel a helyettesítéses integrál többváltozós függvényekre vonatkozó általánosítása, nem bizonyítjuk.

6.42. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $g : U \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény és $B \subseteq U$ egy zárt Jordan-mérhető halmaz, melyen belsején g injektív. Ekkor ha $f : g(B) \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény, akkor*

$$\int_{g(B)} f = \int_B (f \circ g)|\det(\mathbf{J}_g)|.$$

Összefoglaljuk és példákon illuszráljuk a legfontosabb helyettesítéseket:

Polárkoordinák: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, vagy más jelölésekkel: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$.

Ezt tipikusan akkor alkalmazzuk, ha "körszerű" alakzaton kell integrálnunk, például körön, körgyűrűn, körszeleten stb.

Számoljuk ki $|\det(\mathbf{J}_g)|$-t:

$$\mathbf{J}_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

amiből $\det(\mathbf{J}_g) = r$, így $|\det(\mathbf{J}_g)| = |r|$. A konkrét alkalmazásokban mindig $r \ge 0$, így az abszolútérték elhagyható.

P1.) $\iint_A e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$, ahol A az origó középű egység súgarú zárt körlap.

Legyen $B = [0,1] \times [0,2\pi]$, ekkor B zárt és Jordan-mérhető, továbbá g injektív B belsején. Világos, hogy $A = g(B)$, így

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B e^{r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_B e^{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\Big[\frac{e^{r^2}}{2}\Big]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{e-1}{2}\mathrm{d}\varphi = \pi(e-1).$$

P2.) $\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol A az origó közepű kettő sugarú zárt körlap első nyolcada.

Most $B = [0,1]\times\big[0,\frac{\pi}{4}\big]$, $A = g(B)$.

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B r\cos(\varphi) r\sin(\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_B r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\Big[\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}.$$

P3.) $\iint_A \sqrt[3]{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol A az origó középpontú egy és kettő sugarú körvonalak közötti zárt gyűrű.

$B = [1,2]\times[0,2\pi]$, $g(B) = A$.

$$\iint_A \sqrt[3]{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \sqrt[3]{r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_B r^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\Big[\frac{3}{8}r^{\frac{8}{3}}\Big]_1^2\mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi(2^{\frac{8}{3}}-1)}{4}.$$

P4.) Számoljuk ki a R sugarú M magasságú kúp térfogatát. Alkalmazzuk az 6.36 Tételt: a kúp pont az $f(x,y) = M - \frac{M}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ függvény alatti alakzat az $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$ halmazon, így térfogata az f integrálja A-n. Legyen $B = [0,R]\times[0,2\pi]$, ekkor $A = g(B)$, így

$$\iint_A M - \frac{M}{R}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \Big(M - \frac{M}{R}r\Big) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_B Mr - \frac{M}{R}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R Mr - \frac{M}{R}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\Big[M\frac{r^2}{2} - \frac{M}{R}\frac{r^3}{3}\Big]_0^R\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\Big(\frac{MR^2}{2} - \frac{MR^2}{3}\Big)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\frac{MR^2}{6} = \frac{MR^2\pi}{3}.$$

P5.) Számoljuk ki az R sugarú gömb térfogatát. Hasonlóan P4.)-hez a felső félgömb térfogata az $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ függvény integrálja az $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}$ halmazon. $B = [0,R]\times[0,2\pi]$, $A = g(B)$.

$$\iint_A \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \sqrt{R^2-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{-2}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{R^3}{3}\mathrm{d}\varphi = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

Tehát a gömb térfogata ennek a kétszerese: $\frac{4R^3\pi}{3}$.

Hengerkoordináták: $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g(r,\varphi,m)=(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), m)$, vagyis $x=r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$ és $z=m$. Akkor alkalmazzuk, ha "hengerszerű" alakzaton kell integrálnunk, például hengeren vagy kúpon.

$$\mathbf{J}_g(r,\varphi,m)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

amiből $\det(\mathbf{J}_g)=r$, így $|\det(\mathbf{J}_g)|=|r|$. A konkrét alkalmazásokban most is mindig $r\geq 0$, így az abszolútérték elhagyható.

H1.) $\iiint_A e^{z+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol A az xy síkon "álló" z tengelyű 1 sugarú és 2 magasságú henger. $B=[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,2]$, $A=g(B)$.

$$\iiint_A e^{z+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B e^{m+r}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^2 e^m e^r r\mathrm{d}m\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^1\int_0^{2\pi} e^r r\big[e^m\big]_0^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} e^r r\big(e^2-1\big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^1 2\pi\big(e^2-1\big)e^r r\mathrm{d}r =$$

$$2\pi\big(e^2-1\big)\Big(\big[e^r r\big]_0^1 - \int_0^1 e^r\mathrm{d}r\Big) = 2\pi\big(e^2-1\big)\big(e-\big[e^r\big]_0^1\big) = 2\pi\big(e^2-1\big)$$

H2.) $\iiint_A xy + e^{z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x^2+y^2\leq z\leq 1\}.$$

Ekkor ha

$$B=\{(r,\varphi,m)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq m\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq\sqrt{m}\}$$

zárt halmaz, akkor $A=g(B)$.

$$\iiint_A xy+e^{z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B \big(r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)+e^{m^2}\big)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{m}} r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)+e^{m^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\cos(\varphi)\sin(\varphi)+e^{m^2}\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{m}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{m^2}{4}\cos(\varphi)\sin(\varphi)+e^{m^2}\frac{m}{2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m=\int_0^1\Big[\frac{m^2}{4}\frac{\sin^2(\varphi)}{2}+e^{m^2}\frac{m}{2}\varphi\Big]_0^{2\pi}\mathrm{d}m=$$

$$\pi\int_0^1 e^{m^2}m\mathrm{d}m=\pi\Big[\frac{e^{m^2}}{2}\Big]_0^1=\frac{\pi(e-1)}{2}.$$

H3.) $\iiint_A\frac{2z-4}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=?$, ahol A az xy síkon álló 2 magasságú és 1 súgarú kúp $x\leq 0$ féltérbe eső fele. Formálisan:

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x\leq 0,\ 0\leq z\leq 2,\ \sqrt{x^2+y^2}\leq 2-z\}.$$

Ekkor ha $B=\{(r,\varphi,m)\in\mathbb{R}^3: 0\leq m\leq 2,\ \frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{2},\ 0\leq r\leq 2-m\}$, akkor $g(B)=A$, így

$$\iiint_A\frac{2z-4}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_B\frac{2m-4}{\sqrt{r^2+1}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m=$$

$$\int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{m-2}(2m-4)\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m=$$

$$\int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(2m-4)\big[\sqrt{r^2+1}\big]_0^{m-2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m=$$

$$\int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(2m-4)\big(\sqrt{m^2-4m+5}-1\big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}m=$$

$$\pi\int_0^2(2m-4)\big(\sqrt{m^2-4m+5}-1\big)\mathrm{d}m=$$

$$\pi\Big[\frac{2}{3}(m^2-4m+5)^{\frac{3}{2}}-m^2+4m\Big]_0^2=\pi\Big(\frac{2}{3}\big(1-5^{\frac{3}{2}}\big)+4\Big)$$

Gömbi polárkoordináták: $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$g(r,\varphi,\vartheta)=(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi),r\sin(\vartheta)\sin(\varphi),r\cos(\vartheta)),$$

vagyis $x=r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$ és $z=r\cos(\vartheta)$. Ezt a koordinátázást úgy kapjuk, hogy egy vektort a térben a hosszával (r), az xy síkra vett vetületének x tengellyel bezárt szögével (φ) és a z tengellyel bezárt szögével jellemzünk (ϑ) . Pédául gömbön, gömbszeleten vagy gömbkúpon való integrálásnál hasznos.

$$\mathbf{J}_g(r,\varphi,\vartheta)=\begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\\ \cos(\vartheta) & 0 & -r\sin(\vartheta)\end{pmatrix},$$

amiből $\det(\mathbf{J}_g)=r^2\sin(\vartheta)$, így $|\det(\mathbf{J}_g)|=|r^2\sin(\vartheta)|$. A konkrét alkalmazásokban mindig $r\geq 0$ és $0\leq\vartheta\leq\pi$, így az abszolútérték elhagyható.

G1.) $\iiint_A x^2+y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol A az origó középpontú 1 sugarú gömb xy sík fölé eső része, formálisan:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Ekkor ha $B = [0,1] \times [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor $g(B) = A$, így

$$\iiint_A x^2+y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B r^2 \sin^2(\vartheta) r^2 \sin(\vartheta) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \sin^3(\vartheta) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^3(\vartheta) \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$\frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\big(1-\cos^2(\vartheta)\big) \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta) - \sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta =$$

$$\frac{\pi}{5}\Big[-\cos(\vartheta) + \frac{\cos^3(\vartheta)}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{5}\Big(0+1-\frac{1}{3}\Big) = \frac{2\pi}{15}.$$

G2.) $\iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{3x^2+3y^2} \leq z,\ 9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 81\}.$$

Könnyen meggondolható, hogy A egy gömbkúp és egy gömbgyűrű metszete, $B = [3,9] \times [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ esetén $g(B) = A$, így

$$\iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B \frac{r^2 \sin(\vartheta)}{r^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} \int_3^9 \sin(\vartheta) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = (9-3)(2\pi-0) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta =$$

$$12\pi\big[-\cos(\vartheta)\big]_0^{\frac{\pi}{6}} = 12\pi\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\Big).$$

6.43. Feladat. $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol A az origó középpontú 1 sugarú körlap első negyede.

6.44. Feladat. $\iint_A \frac{x}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =?$, ahol

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}.$$

6.45. Feladat. $\iiint_A z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4-z^2\}.$$

6.46. Feladat. $\iiint_A z e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol A az xy síkon álló 1 magasságú z tengelyű henger.

6.47. Feladat. $\iiint_A xyz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol A az origó középpontú 1 sugarú gömb.

6.48. Feladat. $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =?$, ahol A az origó középpontú 1 és 2 sugarú gömbök közötti gömbgyűrű.

7. Appendix

Halmazok és függvények

Röviden összefoglaljuk a legfontosabb halmazelméleti fogalmakat.

$\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok, $\mathbb{Z}$ az egész számok, $\mathbb{Q}$ a racionális számok és $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát.

Adott A és B halmazok esetén $A \times B$ a két halmaz *Descartes-szorzata*:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ha A, B két halmaz, akkor egy A-n értelmezett B-be képező f függvényt "$f : A \to B$"-vel vagy "$A \xrightarrow{f} B$"-vel jelölünk. f *értelemzési tartománya*: $\mathrm{dom}(f) = A$; f *értékkészlete*:

$$\mathrm{ran}(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A\ f(a) = b\}.$$

Egy $f : A \to B$ függvény *konstans*, ha létezik egy $b \in B$, hogy minden $a \in A$-ra $f(a) = b$, jelölésben $f \equiv b$.

Ha $f : A \to B$ egy függvény és $X \subseteq A$, akkor legyen $f(X)$ az X halmaz *képe* (f-re nézve), vagyis

$$f(X) = \{b \in B : \exists\, x \in X\ f(x) = b\}.$$

Ha $f : A \to B$ egy függvény és $A' \subseteq A$, akkor f-et megszoríthatjuk A'-re és kapjuk az

$$f \restriction A' : A' \to B$$

függvényt, vagyis minden $a \in A'$-re $(f \restriction A')(a) = f(a)$.

Egy $f : A \to B$ függvény

- *injektív*, ha különböző A-beli elemeket f különböző B-beli elemekbe képez, vagyis
$$\forall\, a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2));$$
- *szürjektív*, ha minden B-beli elem előáll egy A-beli elem képeként, azaz $\mathrm{ran}(f) = B$, vagyis
$$\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ f(a) = b;$$
- *bijektív*, ha injektív és szürjektív, vagyis oda-vissza egyértelmű (összepárosítja A és B elemeit).

Egy $f : A \to B$ injektív függvénynek képezhetjük az *inverzét*:

$$f^{-1} : \mathrm{ran}(f) \to A,$$

ha $b \in \mathrm{ran}(f)$, akkor $f^{-1}(b)$ az az egyértelműen létező $a \in A$, melyre $f(a) = b$, másképpen $f^{-1}(f(a)) = a$.

Ha $g : A \to B$ és $f : B \to C$, akkor a függvények *kompoziciója*:

$$f \circ g : A \to C,\ (f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Lineáris algebra

Röviden összefoglaljuk a véges dimenziós valós vektorterek közötti lineris leképezések alaptulajdonságait. Mivel minden véges dimenziós valós vektortér izomorf $\mathbb{R}^n$-el valamely n-re, ezért csak ilyen alakú vektorterekkel és ezek közötti lineáris leképezésekkel fogunk foglalkozni.

Egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény *lineáris leképezés*, ha teljesülnek a következők:

(a) $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n\ \varphi(\underline{x} + \underline{y}) = \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y})$,

(b) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ \varphi(\lambda\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x})$.

Jelölje $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések halmazát. Könnyen meggondolható, hogy a következő természetes műveletekkel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ egy vektortér: $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\varphi + \psi)(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) + \psi(\underline{y}),$$

$$(\lambda\varphi)(\underline{x}) = \lambda\varphi(\underline{x}).$$

A tér null vektora természetesen a konstans $\underline{0} \in \mathbb{R}^m$ értékű függvény.

Jelölje $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok vektorterét. Adott $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ elemeit mostantól oszlopvektoroknak tekintve az

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\underline{x}) = \mathbf{A}\underline{x}$$

leképezés lineáris. A következő állítás szerint nincs is más alakú lineáris leképezés.

7.1. Állítás. *Minden $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-hez létezik egyértelműen egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, hogy $\varphi = \varphi_{\mathbf{A}}$, vagyis minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re $\varphi(\underline{x}) = \mathbf{A}\underline{x}$.*

Sőt a $\mathbf{A} \mapsto \varphi_{\mathbf{A}}$ függvény egy izomorfizmus az $\mathbb{R}^{m\times n}$ és $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektorterek között.

Bizonyítás. (Ötlet) Hogyan kaphatjuk meg $\mathbf{A}$-t? Legyen $\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^n$ a standrad bázis $\mathbb{R}^n$-ben és legyen

$$\mathbf{A} = \big(\varphi(\underline{e}^1) \mid \dots \mid \varphi(\underline{e}^n)\big),$$

amin természetesen azt értjük, hogy oszlopvektorok egymásmellé írásával kapjuk a mátrixot. $\square$

Tárgymutató