3. előadás

Műveletek racionális számokkal

Összeadás: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\,d+b\,c}{b\,d}$ Kivonás: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$

Szorzás: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$ Osztás: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}$

Nevezetes azonosságok

$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2\,a\,b+b^2$

$(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\,a\,b+2\,a\,c+2\,b\,c$

$(a+b)^3=a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3\,a^2\,b+3\,a\,b^2-b^3$

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-a\,b+b^2\right)$

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+a\,b+b^2\right)$

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2+...+a\,b^{n-2}+b^{n-1}\right)$

Binomiális tétel: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$, ahol $n\in\mathbb{N}$, $a,\,b\in\mathbb{R}$, és $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ az ún. binomiális együtthatók.

Részletesebben: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n\,b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}\,b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}\,b^2+...+\binom{n}{n-1}a^1\,b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0\,b^n$.

Példák:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a^1+\,b^1$

$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5\,a^4\,b+10\,a^3\,b^2+10\,a^2\,b^3+5\,a\,b^4+b^5$

stb.

A hatványozás és gyökvonás azonosságai

Pozitív egész kitevőjű hatvány: $a^n:=a\cdot a\cdot a\cdot...\cdot a$; $a^1=a$.

Negatív egész és 0 kitevőjű hatvány: $a^{-n}:=\frac{1}{a^n}$; $a^0:=1$.

Racionális kitevőjű hatvány: $a^{\frac{1}{k}}:=\sqrt[k]{a}$; $a^{\frac{n}{k}}:=\sqrt[k]{a^n}$

Azonos alapú hatványok: $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$

$\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$

$(a^n)^k=a^{n\,k}$

Azonos kitevőjű hatványok: $(a\,b)^n=a^n\,b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Azonos alapú gyökök: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ Azonos kitevőjű gyökök: $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

$\left(\sqrt[k]{a}\right)^n = \sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}}$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Feladatok

1.

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változók lehetséges értékei melett:

a) $\left(\frac{a^3 + a\,b^2}{a^2 - a\,b} - \frac{2\,a\,b}{a - b} - \frac{b^2 - a\,b}{a}\right) : \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2}$

b) $\left(a + b - \frac{a}{a\,b - b^2} - \frac{b}{a\,b - a^2}\right) : \left(\frac{b}{a^2 - a\,b} + \frac{a}{b^2 - b\,a}\right)$

c) $\left(\frac{a^2 - a\,b}{a^2\,b + b^3} + \frac{2\,a^2}{a^3 - a^2\,b + a\,b^2 - b^3}\right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + a\,b + b^2}$

d) $\frac{x^2 - y^2}{2}\left(\frac{1}{(x + y)^2} - \frac{1}{(x - y)^2}\right) : \left(\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y}\right)$

e) $\left(\frac{x + y}{x^2 - y^2} - \frac{x - y - 1}{y - x}\right) : \left(\frac{y\,x^2}{y^2 + x\,y} - \frac{x\,y^2}{x^2 + x\,y}\right)$

f) $\left(\frac{y - x}{x^2 + x\,y} - \frac{x - y}{y^2 + x\,y}\right) : \left(\frac{x^2 + x\,y}{y^3 - y\,x^2} + \frac{y^2 + x\,y}{x^3 - x\,y^2}\right)$

2.

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változó lehetséges értékei mellett:

a) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^9 \cdot \sqrt{x}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}}} \cdot \sqrt[8]{x^9}$ **b)** $\frac{\sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x^{-8}}} \cdot \sqrt{x^6 \cdot \sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x^{12}}}$ **c)** $\frac{\sqrt[4]{x^{-1} \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}}{x^{-2} \cdot \sqrt{x^3}}$

d) $\frac{\sqrt{x^{-8} \cdot \sqrt{x^3}}}{\sqrt{x^5}} \cdot \sqrt{\frac{x^{11} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}$ **e)** $\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2\,\sqrt{a}}}}\,\sqrt[4]{a}$ **f)** $\sqrt{a^3\,\sqrt[4]{a\,\sqrt{a^{10}}}} - \sqrt{a^3\,\sqrt{a^3}}$

3.

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$

b) $\left(\sqrt{16 + 2\,\sqrt{55}} - \sqrt{16 - \sqrt{220}}\right)^2$

c) $\sqrt[4]{9} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

e) $\sqrt{7} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

f) $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

Eredmények

1. a) $\frac{1}{a}$ **b)** $1 - a b$ **c)** $\frac{a}{b}$ **d)** x **e)** $\frac{1}{x - y}$ **f)** $\frac{x - y}{x + y}$

2. a) x^2 **b)** $x^{1/4}$ **c)** $x^{3/8}$ **d)** $\frac{1}{x^{1/3}}$ **e)** $a^{1/3}$ **f)** 0

3. a) $2\sqrt{2}$ **b)** 20 **c)** -2 **d)** 3 **e)** -1 **f)** 4