*Hamilton- és Euler-kör*

2002. február 15.

(Marx Dániel)

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Euler-kör: irány nem számít!!!

minden élet pontosan egyszer érintünk; NEM kör!

Szükséges és elégséges tétel:

minden pont foka páros; a gráf összefüggő

Euler-út: irány nem számít!!!

kezdő és végpont különböző lehet; NEM út!

Szükséges és elégséges tétel:

0 vagy 2 pont foka páratlan, a többié páros; a gráf összefüggő

(mivel minden gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros, nem lehetséges, hogy csak 1 csúcs foka páratlan!)

Hamilton-kör: irány nem számít!!!

olyan kör, amely minden csúcsot pontosan egyszer érinti

Szükséges tétel:

ha k darab csúcs elhagyásával több mint k komponensre esik szét, nem létezik a gráfban H.-kör

## Elégséges feltételek

1. Dirac-tétel: ha G egyszerű gráfban (n≥3) minden csúcs fokszáma ≥ n/2, akkor létezik H.-kör
2. Ore-tétel: ha G egyszerű gráfban (n≥3) bármely két NEM szomszédos csúcsra nézve a fokszámok összege ≥ n, akkor létezik H.-kör

# FELADATOK

1. *Hogyan változhat egy gráfban a Hamilton-kör megléte, ha behúzunk, illetve törlünk egy élt? Az Euler-körről tudunk valami ilyet állítani?*

Ha van H.-kör, és behúzunk egy élet, akkor biztosabban találok H.-kört; ha kitörlök egy élt, akkor nem tudom bizotsan megállapítani, lesz-e továbbra is H.-kör.

Ha nem volt a gráfban H.-kör, és behúzok egy élt, nem tudom bizotsan megállapítani, ha törlök egyet, akkor azonban bizotsan továbbra sem lesz H.-kör.

Ha van a gráfban E.-kör,és behúzok egy élt, vagy törlök egy élt, biztosan nem lesz már benne E.-kör, hiszen ezzel lesz páratlan fokú él a gráfban!

Ha nincs a gráfban E.-kör, akkor semmi biztosat nem tudok állítani.

1. *Egy k pontú teljes gráfban k milyen értékeire van Euler-kör, Euler-út, Hamilton-kör, Hamilton-út?*

Euler-kör: k pontú teljes gráf minden csúcsának fokszáma (k-1), ez akkor páros, ha k páratlan

Euler-út: ha 0 plan fokú csúcs van, akkor Euler-kör, azaz k páratlan; ha 2 plan fokú csúcs van, akkor ez csak úgy lehet, ha minden csúcs foka páratlan, de a csúcsok fokszáma azonos => 2 csúcsú gráf, tehát k=2

Hamilton-kör: Dirac tételét alkalmazva: k-1≥k/2. Ezt levezetve kapom: k≥2, ez pedig minden képpen igaz, mert a Dirac-tétel feltétele szerint a fokszám legalább 3. Így a megoldás: k≥3.

Hamilton-út: ha van H.-kör, akkor H.-út is (körből elhagyva egy élt). Tehát k≥3-ra igaz. Meg kell még vizsgálni k=1, 2-re. Mindkét esetben létezik H.-út, tehát a megoldás: k≥1.

1. *Egy k x l pontból álló rácsban k és l milyen értékeire van Euler-út illetve Euler-kör? (k, l ≥2)*

Euler-kör: rácsban minden “belső” vagy sarkon lévő pont foka páros; a “széleket” kell csak vizsgálni: 2\*(k-2)+2\*(l-2) db páratlan fokú csúcs lehet. Tehát ennek a kifejezésnek kell o-nak lenni. Ez azt jelenti, hogy k=2 és l=2.

Euler-út: a fenti kifejezés értéke a nullán kívül 2 is lehet. Ez azt adja, hogy k=2 és l=2 vagy k+l=5.

1. *Létezik-e olyan 6 pontú és 11 ill. 12 élű egyszerű gráf, amelynek nincs Hamilton-köre?*

11 élű létezik: 5 pontú teljes gráf kiegészítve egy ponttal és egy abba futó éllel.

12 élű nem létezik. Magyarázat: elképzelhető a probléma úgy is, mintha egy 6 pontú teljes gráfból töröltünk volna 3 élet. Mondjuk az u..v közti három élet. Ore-tételt használjuk ki: ennek a két nem szomszédos pontnak eredetileg a fokszáma legfeljebb összesen 10. Ebből az élek törlésével vonunk ki “fokokat”: 10-2-1-1=6. Azaz legfeljebb 6-ra csökken a fokszám, így teljesül az Ore-tétel. Tehát nincs olyan gráf, melyben nincs H.-kör.

1. *Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű 8-reguláris gráfból el lehet hagyni éleket úgy, hogy minden csúcs foka pontosan 4 legyen!*

Ha összefüggő a 8-reguláris gráf, akkor létezik Euler-köre. A fokszámok összege = élek számának kétszerese, azaz: 8n=2e, e=4n => páros sok éle van.

ÖTLET: Sorszámozzuk meg az éleket, majd hagyjuk el a páratlan sorszámú éleket! Ekkor egy 4-reguláris gráfot kapok, mert a 8 élből 4 páros sorszámú, 4 pedig páratlan volt.

Ugyanis: ha pároson érkezek a csúcsba, akkor páratlanon fogok távozni, ha pedig páratlanon érkezek, akkor pároson távozok. Kihasználva, hogy páros sok élem van, biztos, hogy a 8 élből 4 páros, 4 páratlan lesz.

1. *Ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor bármely v csúcsára és bármely e élére a G-v és a G-e gráf is összefüggő. (Ez csak egy állítás, de láthatóan igaz és hasznos is lehet!)*
2. *Legalább hány élet kell hozzávenni az alábbi gráfhoz, hogy legyen benne Euler-kör? Legalább hány élet kell kitörölni, hogy legyen benne E.-kör?*

Hozzávenni: egyetlen egyet: a két páratlan fokú csúcsot kell csak összekötni.

Törölni: kettőt, így lesz minden pont foka páros. (jelölve pirossal)

1. *Egy 2000 csúcsú gráfban minden csúcs foka legalább 1500. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább 251 páronként éldiszjunkt Hamilton-kört!*

Dirac-tétel miatt biztosan létezik egy Hamilton-kör. Ez legyen az első kör! => d(n)=1500-0\*2;

Hagyjuk el a H.-kör éleit egy gráfból => minden csúcsból 2 élet hagyok el, fokszám kettővel csökken: minden csúcs fokszáma ≥ 1498 => Dirac: ez a 2.kör!: d(n)=1500-1\*2;

Ugyanezt ismétlem tovább

minden csúcs foka ≥ 1000 => Dirac: H.-kör: ez csak a 251. kör lehet, mert 1500-250\*2=1000.

Ezzel be is bizonyítottuk az állítást.

1. *Hány különböző Hamilton-utat illetve kört tartalmaz a Kn?*

Hamilton-kör: elképzelhető úgy, hogy számokat írom le sorban: minden számot (csúcsot) egyszer; mivel körről van szó, elforgathatóak a létező H.-körök úgy, hogy egy adott pontból kezdjünk el számolni. Ekkor a többi helyére a számsorozatnak a maradék (n-1) csúcsot (n-1)! féleképpen írhatom le. Ekkor azonban minden kört kétszer vettem, ezért ténylegesen (n-1)!/2 kül. H.-kör lesz!

Megjegyzés: a három csúcsú teljes gráf egyetlen H.-kört tartalmaz!!!

Hamilton-út: hasonlóan csúcssorrend, de útnál nem adható meg kezdő, mert van vég is, ezért: n!/2 különböző H.-út lesz.

# *Páros gráfok, párosítás*

# 2002. február 22.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *Mutassunk olyan n csúcsú gráfot, aminek ( n-1) +1, de nincs benne Hamilton-kör!*

*2*

Szükséges tétel Hamilton-kör létezésére: k csúcs elhagyásával kevesebb, mint k+1 komponensre esik szét.

Az élek száma kifejezve: (n2-3n+2)/2. Jó példa erre az előző gyakorlaton már felrajzolt 5 csúcsú teljes gráf kiegészítve egy éllel. Általánosítva: n-1 csúcsú teljes gráfhoz hozzáveszek egy élet. Ebben biztosan nem lesz H.-kör, mert van benne elsőfokú csúcs!

1. *A G gráf pontjai egy 8 elemű halmaz 2 elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e G-ben Hamilton-kör? És Hamilton-út?*

Egy 8 elemű halmaznak pontosan “8 alatt a 2”, azaz 28 kételemű részhalmaza van. Ez azt jelenti, hogy éppen 28 csúcsú gráfról van szó, melyben a csúcsok rendre a következők: (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (1,7); (1,8); (2,3); (2,4); …(6,7); (6,8); (7,8). Az élek létezésének feltételei szerint minden csúcsot éppen “6 alatt a 2” csúccsal kötök össze, azaz 15 csúccsal. Így minden egyes csúcs foka 15. Erre pedig teljesül Dirac tétele. (15>=14) Tehát létezik H.-kör a gráfban, ekkor azonban H.-út is!

(Magyarázat: azért éppen 15 a fokszám csúcsonként, mert a nyolcból kettővel nem köthetem össze: a pontpár első, és második tagjával -> ez így 6.)

1. *Egy 2n-1 pontú gráf minden pontjának foka legalább (n-1). Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik a gráfban Hamilton-út!*

ÖTLET: Felveszek még egy csúcsot a gráfban (G’), és ezt összekötöm minden eredeti csúccsal. Ekkor minden csúcs foka legalább n lesz. (Az eredeti gráfban (n-1+1); míg az új pont foka (2n-1).) A pontok száma éppen 2n. Ekkor teljesül Dirac tétele G’-re, azaz ebben van H.-kör. Most elhagyva a hozzávett csúcsot, az eredeti G gráfban még biztosan lesz H.-út!

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Páros gráf: ne legyen olyan él, ami két A-belit vagy két B-belit köt össze.

MINDEN FA PÁROS GRÁF!

Szükséges és elégséges tétel páros gráf létezésére: minden G-ben lévő kör páros hosszúságú.

Párosítás: élek olyan halmaza, hogy minden csúcsra legfeljebb egy él illeszkedik.

Teljes párosítás: úgy választunk éleket, hogy minden csúcsra pontosan egy kiválasztott él illeszkedik.

Hall-tétel: ha létezik A-t lefedő párosítás ⬄ A minden részhalmazára teljesül: X szomszédainak halmaza legalább akkora, mint X. (X részhalmaza A-nak): |N(X)|>=|X|.

Frobenius tétele: akkor létezik teljes párosítás egy gráfban, ha a két pontosztály mérete azonos és X részhalmaza A-nak: |A|=|B|.

HA NINCS TELJES PÁROSÍTÁS, AKKOR LÉTEZIK OLYAN X (X A-nak részhalmaza), HOGY |N(X)|<|A|.

PÁROS GRÁF ≠ PÁROSÍTÁS!!!

(Ha segít: az angol elnevezés a két szóra teljesen eltérő: páros gráf = bipartite; párosítás = matching.)

# FELADATOK

1. *Az alábbi két gráf közül melyik páros?*

Az első gráfban van nem páros hosszúságú kör. Ha azonban ezt így nem találjuk meg, akkor egy jó módszer: veszem sorra a csúcsokat, az adott csúcsot feketével jelölöm, a vele szomszédosokat pedig pirossal. Mindig ellenkező színű legyen bármely két szomszédos csúcs. (Szomszédos = van közöttük él.) Ha így jól elválasztható két ponthalmazt kapok színek szerint, akkor a gráf páros.

1. *Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a két pontosztály mérete azonos!*

Páros gráf, ha minden köre páros hosszúságú. Így az ebben létező H.-kör is páros hosszúságú. Mindkét pontosztály (n/2) csúcsot tartalmaz, így tehát a két pontosztály mérete azonos. (Szemléltethető ez az előbbi “színezős” módszerrel is. Ekkor a H.-kör csúcsainak fele piros, fele fekete lesz!)

1. *Egy cég 6 állást kínál betöltésre. András az 1, Béla az 1,6, Csilla a 2,3,4, Dávid a 2,5, Elemér a 3,4,5, Ferenc az 1,6, Géza a 6 állásokat pályázza meg. Maximum hány állást lehet betölteni? (Egy állásra csak egy embert lehet felvenni, és egy ember csak egy állást tölthet be.)*

Legyen az A pontosztály az állások halmaza, míg a B a pályázók halmaza. Az nyilvánvaló, hogy nincs teljes párosítás, hiszen Frobenius tétele nem teljesül: a két pontosztály mérete nem azonos. Ha megpróbálunk minél több állást betölteni, akkor még 5 állást könnyedén be tudunk tölteni, hatot azonban nem sikerül. Sejtésünk tehát az, hogy legfeljebb öt állás tölthető be. Ekkor azt kell bizonytanunk, hogy hat biztosan nem betölthető, ötre pedig mutatunk egy lehetséges példát. Található olyan részhalmaz, melyre nem teljesül Hall tétele: a 2,3,4,5 szomszédai a Csilla, Dávid és Elemér => 3>=4 ellentmondásra jutottunk. Ezzel sejtésünket bebizonyítottuk: legfeljebb öt állás tölthető be az adott feltételek mellett.

1. *Legyen egy gráf csúcsai az összes lehetséges n hosszúságú 0-1 sorozat, és két csúcs akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátában tér el.*
2. *Hány pontja, hány éle van?*
3. *Páros-e a gráf?*
4. *Milyen hosszú a legrövidebb kör a gráfban?*
5. *Van-e Euler-kör a gráfban?*
6. *Van-e teljes párosítás a gráfban?*
7. *Van-e Hamilton-kör a gráfban?*

Megjegyzés: lényegében ez a digitális technikából már jól ismert Hamming-távolsággal kapcsolatban emlegetett hiperkocka. Ennek birtokában szinte az összes kérdés megválaszolható s mát megszerzett ismeretekkel.

1. csúcsok száma: 2n

élek száma: (n\*2n)/2 (magyarázat lejjeb!)

minden csúcs foka n;

élek számának kiszámítása: Σd(v) = 2e => ebe behelyettesítve mindent, kapjuk a fenti megoldást

1. A gráf páros. “Bizonyítás”: ha az alábbi módon választjuk meg a pontosztályokat:

A={páros sok 1-es}

B={páratlan sok 1-es}

Ekkor minden él éppen a két pontosztály között halad.

1. n=1 esetén nincs kör. Egyébként:

Pl.: 000….0

100….0

110….0

100….0

Ebben az esetben bármely egymást követő között egyetlen bites eltérés van, azaz ez egy négy hosszúságú kör. Mivel páros a gráf, ezért 3 hosszú köre nem lehet. Kettő hosszú pedig azért nem lehet, mert egy kör hossza ≥ 3.

1. Ha n páros, akkor minden csúcs foka páros. Már csak azt kell megvizsgálni, összefüggő-e a gráf: bármely két pont között van út, ugyanis egy bites változtatásokkal be tudjuk járni. Ekkor teljesül az Euler-kör létezésének szükséges és elégséges feltétele, tehát ekkor van Euler-kör a gráfban.

e.) Pl.: 0111001…

1111001…

Ekkor az első bitet átbillentem: így mindegyiknek pontosan egy párja van, azaz létezik teljes párosítás.

f.) Visszavezethető egy olyan problémára, hogy milyen hosszú a leghosszabb kör a gráfban. Ha n, akkor létezik H.-kör.

Gray-kód szerint bejárható a gráf, azaz van H.-kör.

De ugyanezt kaphatjuk: n=1 esetén nincs H.-kör, n=2 esetén létezik H.-kör. Indukciót alkalmazunk tehát:

TFH n-re létezik H.-kör. Bizonyítsuk be, hogy (n+1)-re is létezik!

0………………………..a1

0………………………..a2

stb

0………………………..a2n

1………………………..a2n

stb

1………………………..a2

1………………………..a1

Megjegyzés: a kipontozott helyeken n bit áll. Így ténylegesen egyetlen pozícióban térnek el: az első pozíció változik, az utolsó n pozíció egyezik. (Megfigyelhető, hogy ez a Gray-kód képzés alapelve.)

1. *Egy G gráfról csak azt tudjuk, hogy fokszámai: 2,3,3,4,4,5,5. Mutassuk meg, hogy biztos van benne Hamilton-kör!*

Ennek a gráfnak tehát 7 csúcsa van, rendre d1, d2,… d7. Dirac és Ore tétele is elbukik. Ekkor a Pósa-tételt alkalmazzuk! E szerint minden k <n/2-re dk ≥ k+1, akkor létezik H.-kör. Ezt a mi gráfunkon tehát k= 1, 2 és 3 esetén kell ellenőrizni. Csak d3 nem felel meg a feltételnek, mert 3 ≥ 4 ellentmondásra jutunk.

Akkor már csak a Chvátál tétellel próbálkozhatunk.

VIGYÁZAT! EZ A MEGFOGALMAZÁS ZAVARÓ LEHET! (DE IGAZ!): *minden k <n/2-re vagy dk ≥ k+1, vagy dn - k ≥ n-k teljesül.*

Ebbe már csak be kell helyettesíteni k=1, 2 és 3 esetén. A tétel valóban teljesül, tehát létezik H.-kör.

# *Gallai és König tételei, Tutte-tétel*

# 2002. március 1.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

*1. Hány különböző teljes párosítása van az alábbi gráfnak? Nehezebb feladat: és ha azt a „létrát” tekintjük, amiben nem 4, hanem n függőleges él van?*

Összesen 3 lehetséges párosítás található ebben a gráfban. Ha általánosítunk, észrevehetjük, hogy Fibonacci-sort kapunk: 1 függőleges él esetén egyetlen teljes párosítás, 2 függőleges él esetén szintén; 3 esetében már kettő. Tovább vizsgálva azt kapom, hogy n függőleges él esetén: vagy kiválasztom az 1. függőleges élet, ekkor (n-1) függőleges élűre vezettem vissza; vagy ha a 2 első vízszintes élet választom ki, akkor pedig (n-2)-re vezettem vissza a problémát. Összesen pedig e kettőnek az összegéből áll össze az n függőleges élű létrára a teljes párosítások száma. Azaz ez éppen a Fibonacci-féle szám: Fn=Fn-1+Fn-2.

*2. Egy páros gráf egyik pontosztályában van olyan X részhalmaz, amelyre |N(X)|≤|X|-2, ahol N(X) jelöli az X-beli csúcsok szomszédait. Bizonyítsuk be, hogy nincs a gráfban Hamilton-út!*

Tegyük fel, hogy van Hamilton-út a gráfban. Vegyük ebből a gráfból minden páratlan számú élet. Ekkor legfeljebb egy csúcs kivételével mindenkit lefedő élhalmaz található. Így ha ki is marad az a bizonyos egyetlen csúcs, akkor is azt kapjuk, hogy |N(X)|≥|X|-1. Ugyanis N(X)-ben találunk mindegyikhez párt, legfeljebb az egyetlen „felesleges” csúcshoz nem! Ez azonban ellentmond az eredeti feltétellel, tehát a gráfban akkor mégsincs Hamilton-út.

*3. A G összefüggő gráf tetszőleges pontját elhagyva a kapott gráfnak létezik teljes párosítása. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfban nincs elvágó él, vagyis tetszőleges élet elhagyva a gráf továbbra is összefüggő marad!*

Tegyük fel, hogy van elvágó él a gráfban. Eredetileg páratlan sok csúcsa van a gráfnak (csak így lehet, hogy teljes párosítás állhasson elő egy csúcsot elhagyva). Az elvágó él legyen A és B pontosztály között, melyekből az egyik biztosan páros sok csúcsot tartalmaz (Pl.: A), míg a másik páratlan sok csúcsot. Az elvágó él A-hoz aq-nál, B-hez bq-nál illeszkedik. Ekkor A- aq páratlan sok csúcsot tartalmaz, és nincs közös éle a másikkal, azaz nincs benne teljes párosítás. Így nem maradt összefüggő sem a gráf, tehát a feltevés hamis volt. Ez eredményezi, hogy az állítás igaz: nincsen benne elvágó él.

*4. Legyen adott egy G páros gráf, amiben mindkét pontosztályban n pont van, és tekintsük ennek az A szomszédsági mátrixát. Mutassuk meg, hogy ha detA≠0, akkor G-ben van teljes párosítás!*

A szomszédsági mátrix tulajdonságait és a determináns definíció szerinti kiszámítását ismerve a feladat megoldása:

Csak a satírozott területeken lehet így nem nulla elem. A többi részen csupa nulla elem áll. Definíció szerint akkor nem nulla a determináns, ha legalább az egyik tag nem nulla. Ezért az elemek csak a besatírozott területekről lehetnek. Ki lehet úgy választani, hogy minden elemre pontosan egy él fog illeszkedni.

MEGJEGYZÉS: ha létezik teljes párosítás van, akkor detA≠0 nem igaz!!! Így a feladat szövege egy ELÉGSÉGES feltételt ad.

j

i

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Független élek maximális száma: tulajdonképpen egy élhalmaz tulajdonsága => maximum mekkora méretű független élhalmazt tudok kiválasztani. Jele: ν(G).

Független csúcsok maximális száma: ha semelyik két él között nincs összeköttetés. Jele: α(G).

Lefogó csúcsok minimális száma: ha a gráf minden élének legalább az egyik vége benne van. Jele: τ(G)

Lefogó élek minimális száma: minden csúcsra illeszkedjen minimum egy kiválasztott él; ha izolált pont van a gráfban, akkor értelemszerűen ezt nem értelmezzük. Jele: ρ(G).

GALLAI TÉTELEI:

1. Ha nincs hurokél => α(G)+ τ(G)= v(G) (a két, csúcsra vonatkozót fogja össze)
2. Ha nincs izolált pont => ν(G)+ ρ(G)= v(G) (a két, élre vonatkozót fogja egybe)

Egyéb egyszerű becslések:

1. ν(G)≤ τ(G) minden gráfra
2. α(G) ≤ ρ(G) minden gráfra

KÖNIG TÉTELE:

Ha G páros gráf, akkor ν(G)= τ(G).

Ha nincs G-ben izolált pont és G páros, akkor pedig még az is igaz: α(G)= ρ(G).

TUTTE TÉTELE:

G gráfban létezik teljes párosítás ⬄ minden X részhalmaza V(G)-re c(V-X) ≤ |X|, azaz X-nek legalább akkorának kell lennie, mint a páratlan csúcsú komponensek száma. (c a gráf páratlan komponenseinek száma).

Megjegyzés: Frobenius tételének ez kibővítése, mert tetszőleges, nem csak páros gráfra ad szükséges-elégséges feltételt teljes párosítás létezésére.

# FELADATOK

1. *Mennyi a τ(Kn,m)? (A Kn,m az n és m méretű pontosztályokkal rendelkező teljes páros gráf, lásd K3,3-t.)*

τ(Kn,m)= min {n,m}. Ez biztosan elegendő, jól látható. Csak azt kell szintén belátni, hogy kevesebb nem elég: ha egyetlen is hiányzik, akkor a másik pontosztály összes csúcsát ki kell választanom. Ez pedig nyilván több lenne, mint a már megtalált minimális lefogó ponthalmaz.

Megjegyzés: ν*(Kn,m*)=? Ekkor ν(G)≤ τ(G) összefüggést ismerve, és tudva, hogy min {n,m}≤ν(G). Összevetve ezeket az állításokat, kapható: ν(G)= τ(G)= min {n,m}.

1. *Legyen G egy 2n pontú gráf, mely egy 2n-1 pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi τ(G)?*

Lerajzolva a leírt gráfot, az ábráról könnyen leolvasható, hogy τ(G)=(2n-1-1)/2+1=n. Ugyanis a 2n-1 csúcsból ki kell választani minden másodikat, azaz a felének az alsó közelítését, és a c csúcsot mindenképpen.

1. *Legyen Δ(G) egy gráfban a maximális fokszám! Bizonyítsuk be, hogy Δ(G)\* τ(G)≥|E(G)|.*

Tekintsünk egy minimális lefogó ponthalmazt, ebben τ csúcs van. Minden lépésben egy-egy csúcsra illeszkedő élet elhagyok. Ekkor legfeljebb Δ(G) élet hagyok el minden egyes pont elhagyásakor. Legalább τ csúcsot hagyok el. Összesen tehát: *Δ(G)\** τ≥ |E(G)|.

1. *A Tutte-tétel segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás!*

Nincs teljes párosítás: van olyan X halmaz, amely megsérti a feltételt. Ezt kell megmutatni.

Ez pedig egyszerű, hiszen ha elhagyom a legfelső csúcsot, akkor a gráf szétesik három komponensre, azonban |X|=1. Így ellentmondást kaptam Tutte tételével, tehát az adott gráfban nincsen teljes párosítás.

1. *Bizonyítsuk be, hogy egy r-reguláris páros gráfban mindig van teljes párosítás (r≥1).*

Frobenius tételének feltételeit kell csak ellenőriznünk a gráfunkon, melyek a következők:

1. |A|=|B|: tegyük fel, hogy nem egyenlő => |A|=n; |B|=m. Élek száma (mivel minden csúcsra r él illeszkedik) n\*r, de ugyanakkor m\*r is, melyből következik, hogy n=m, azaz |A|=|B| mégis igaz.
2. Minden X részhalmaza A-ra |X|≤|N(X)|: tegyük fel, hogy nem teljesül, azaz |X|>|N(X)|. Maximum X élből r\*|X| él mehet; ez minden X-re illeszkedik. r\*|X|≤ r\* |N(X)|, azaz |X|≤|N(X)|. Tehát igaz ez a feltétel is.

Mivel teljesülnek Frobenius tételének feltételei, biztos, hogy létezik teljes párosítás a gráfban.

# *Gráfok színezése*

# 2002. március 8.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *Bizonyítsuk be, hogy egy fában legfeljebb egy teljes párosítás lehet!*

Minden fának legalább két elsőfokú csúcsa van. Található egy algoritmus, melynek segítségével kell kiválasztani az éleket: a teljes párosításban mindenképpen szerepelnie kell a két elsőfokú csúcsra eső éleknek; a rá illeszkedőket nem tudom használni. Tehát vegyük el ezt => ekkor eljutunk véges sok lépésben izolált pontig, vagy pedig egy “üres gráfig”. Ha lenne minimum 2 teljes párosítás a fában, akkor nem lennének ilyen kényszerítő erejű döntések!

1. *Legyen G egy 100 csúcsú síkgráf komplementere! Legalább mennyi lesz τ(G)?*

ω(G komplementer) ≤ 4 (G komplementer: síkgráf!; síkgráfban nem lehet 5-nél nagyobb klikk)

G-ben nincs 4-nél nagyobb független csúcshalmaz: α ≤ 4

Most Gallai tételét alkalmazva: α(G)+ τ(G)= v(G)

Ebbe behelyettesítve: 100-4≤ τ(G); azaz: 96≤ τ(G).

Megmutatható, hogy τ(G)=96 lehet. (veszem a K4-et => 96 izolált pontot még hozzá: ennek komplementerében igaz!)

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Kromatikus szám: minimum hány szín kell, hogy a szomszédos csúcsok ne legyenek azonos színűek. Jele: χ(G).

Klikkszám: maximális klikk mérete a gráfban (teljes gráf). Jele: ω(G).

Tétel: ω(G) ≤ χ(G). Fontos!!!: nem feltételenül egyenlő minden esetben: C5 esetén sem

Tétel: χ(G) ≤ 2 ⬄ páros gráf

Tétel: MOHÓ SZÍNEZÉS: χ(G) ≤ Δ(G)+1, ahol Δ a maximális fokszám

# FELADATOK

1. *Egy gráf csúcsai legyenek egy n-szer n-es sakktábla mezői. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok. Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?*

χ(G)=2, mivel ez éppen a sakktábla: páros gráf, melyben a sakktáblának megfelelő sötét és világos csúcsok képzelhetők el.

1. *Tekintsük a nyolc hosszú kört, és kössük össze a kettő távolságra lévő csúcsokat. Mennyi lesz az így kapott gráfban a klikk- és a kromatikus szám?*

ω(G)=3. Magyarázat nélkül is jól látható a gráf lerajzolása után, hogy K3 még található benne, de K4 nem.

χ(G)=4. Magyarázat: olyat lehet találni, hogy 4 színnel színezem ki, de kevesebbel nem lehet, mert: minden színt legfeljebb kétszer használhatok fel. Nyolc csúcs van, tehát 8/2=4 szín kell.

1. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű gráfra fennáll χ(G) ≥ |V(G)|/α(G)!*

A gráf kiszínezhető χ(G) színnel:

1. szín a1-szer ≤α(G)  
2. szín a2-szer ≤α(G)  
…  
χ(G). szín aχ(G)-szer ≤α(G)

Ugyanakkor minden színt legfeljebb annyiszor lehet, amennyi a független csúcsok maximális száma (α(G)). Így legfeljebb χ(G)\*α(G) csúcs színezhető χ(G) színnel. χ(G)\*α(G) ≥ |V(G)|, rendezve kapom az állítást.

1. *Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra χ(G)\*χ(G komplementer) ≥ n teljesül!*

χ(G) ≥ n/α(G); χ(G komplementer) ≥ n/(α(Gkomplementer))=n/(ω(G)).

AMEKKORA FÜGGETLEN ÉLHALMAZ TALÁLHATÓ A KOMLEMENTERÉBEN, ÉPPEN AZ AZ EREDETI KLIKKSZÁMA.

Behelyettesítve a fenti összefüggéseket az egyenlőtlenségbe: megkapom, hogy χ(G)≥ ω(G). Ez pedig tétel.

1. *Legyen V(G)={v1, v2, …, v106}. A vi és a vj csúcs között akkor és csak akkor van él, ha |i-j|≤ 7. Mennyi G kromatikus száma?*

Ha nyolcanként ismétlődve színezem ki, akkor mutatok egy legfeljebb 8 kromatikus számút. (χ(G) ≤ 8).

Ugyanakkor ω(G) ≥ 8, mert 1-8. pont például egy klikk. Tehát akkor 8 ≤ ω(G) ≤ χ(G) ≤ 8, azaz χ(G)=8.

1. *Mutassuk meg, hogy χ(G) ≤ τ(G) +1!*

A baloldalon τ(G), a jobb oldal pedig független élhalmaz. Maximum τ(G) színnel kiszínezhető a baloldal, míg a független élhalmazhoz elegendő egyetlen szín. Így tehát adódik az állítás: χ(G) ≤ τ(G) +1

1. *Igaz-e, hogy minden véges egyszerű gráfnak van olyan χ(G) színnel való színezése, melyben az egyik színosztály α(G) pontot tartalmaz?*

MINDEN SZÍNOSZTÁLY LEGFELJEBB ANNYI PONTOT TARTALMAZ, MINT A FÜGGETLEN CSÚCSOK MAXIMÁLIS SZÁMA!

Vegyünk egy példát:

Első esetben χ(G)=2; α(G)=6. Míg a második esetben χ(G)=3. Tehát elképzelhető, hogy nem úgy sikerül színeznem, hogy minimális legyen!

# *Perfekt gráf, élszínezés, Pert-diagram*

# 2002. március 22.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *Egy fémlapon szigetelő vonalakkal 10000 tartomány van kialakítva. Ellenőriznünk kell, hogy ezek a fémvonalak sehol sem szakadnak meg, a tartományok tényleg el vannak választva. Ehhez rendelkezésünkre állnak vezetékek és egy ellenállásmérő műszer. Hogyan tudnánk a vizsgálatot minél kevesebb méréssel elvégezni?*

Jól kihasználható, hogy síkba vannak rajzolva => ha bármely kettőt összemérem, akkor  lenne.

Ennél található jobb megoldás is: érdemes csak a szomszédos tartományokban mérni. Síkgráf minden tartománya egy csúcs => szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsok között van él: mérések száma annyi, amennyi az élek száma. Egyszerű síkgráfban élek száma ≤ 3n-6. Azaz 29994 él.

Ennél is van jobb megoldás: minden síkgráf kiszínezhető 4 színnel (4 szín tétel). Tehát vegyünk fel a tartományokon kívül négy csúcsot. 1. csúcsot az első színnel, 2. csúcsot a második színnel… stb. színezettekkel kötöm össze. Ekkor csupán =6 mérés (4 csúcsból kettőt ennyiféleképpen lehet kiválasztani) elegendő: ha szakadás van két szín között, akkor rövidzár; egyébként végtelen nagy ellenállás.

De a legjobb megoldás: a felvett csúcsok közül összekötöm 1. és 2., illetve 3. és 4. csúcsot, illetve 1. és 3., illetve 2. és 4. csúcsot. Ezek között kell csak mérni, ez pedig két mérés. (Ha szakadás van, akkor két valamilyen különböző szín között lehet.)

1. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges egyszerű gráfra fennáll, hogy |E(G)| ≥ .*

Az összekötő élek biztosan kellenek, mert különben az 1. és 2. lehetne azonos szín, ekkor azonban χ(G)-1 színezést találnánk. Ez ellentmondás, hiszen χ(G) azt adja meg, hogy minimum hány színnel színezhető.

… stb

Az ábráról leolvasható, hogy féle pár választható ki, ami az élek számát adja. Tehát az állítás igaz.

1. *A V(G) = {1, 2, …, 1023} ponthalmazon definiáljuk a G gráfot úgy, hogy benne k és m akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha nem egyenlők és egyikük osztója a másiknak. Határozzuk meg a χ(G) kromatikus szám értékét.*

ω(G) ≤ χ(G) tételt felhasználva: található egy 10 csúcsú klikk biztosan: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Tehát ω(G) ≥ 10, azaz 10≤ χ(G).

Már csak egy felső korlátot kell találni: írjuk fel kettes számrendszerbe a fent említett csúcsokat! Hossza 1-10lesz. Minden szám (csúcs) azt a színt kapja, amilyen hosszú. Ha *a* osztja *b*-t, akkor *b* ≥ *2a.* Minden szám kétszerese eggyel több bit binárisan (lényegében a kettővel való szorzás a balra shiftelésnek felel meg), tehát *a* és *2a* színe különböző. (Sőt: *2a*-nál nagyobbak színe is különbözik *a*-tól.) Azaz 10 színnel ki lehet színezni: χ(G) ≤ 10.Összevetve: χ(G) =10.

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Élkromatikus szám: minimum hány színnel lehet a gráf éleit színezni, hogy a szomszédosak ne legyenek azonos színűek. Jele: χe(G).

Ebből következően: χe(G) ≥ Δ(G)

Vizing-tétel: ha G egyszerű, akkor χe(G) ≤ Δ(G)+1

Élgráf: él- és csúcsszínezés összekötő kapcsa. Jele: L(G).

(ha azonos csúcsra illeszkedik az eredeti gráfban két él, akkor az élgráfban azt a két csúcsot összekötöm)

χe(G)= χ(L(G))

Perfekt gráf: G perfekt, ha ω(G) = χ(G) minden H feszített részgráfra. (Részgráf: bizonyos éleket és bizonyos csúcsokat elhagyok; feszített részgráf: olyan részgráf, hogy két meghagyott csúcs között nem hagyhatok el éleket.)

Megjegyzés: teljes gráf feszített részgráfra továbbra is teljes, de teljes gráf részgráfja bármi lehet.

Perfektek:

* Páros gráfok
* Páros gráfok komplementere
* Páros gráfok élgráfja
* Páros gráfok élgráfjának komplementere

Lovász tétele: G perfekt ⬄ G komplementere perfekt

Sejtés: G perfekt ⬄ nincs G-ben és G komplementerében legalább 5 hosszú páratlan kör feszített részgráfként. (bizonyításnál csak odafelé használható!)

# FELADATOK

1. *Állapítsuk meg, hogy mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál! Adjuk meg a kritikus utakat is!*

2

1

4

4

1

3

2

2

1

5

1

3

6

4

3

S

T

A

B

F

E

D

C

Szintekre kell bontani! Ebben az esetben a megoldás a forrástól indul a nyelők felé, de fordítva is ugyanazt a megoldást kapnánk!

Szintek:

S 0

A S+3=3

D A+5=8

C MAX(A+3; D+1; S+4)=9

E és B MAX(C+2; D+4)=12; MAX(C+1; S+6)=10

F MAX(B+1; C+2; E+1)=13

T MAX(D+4; E+3; F+2)=15

Az eredmény tehát 15 egység!

Kritikus út keresése: a maximumot előállítókat kell figyelembe venni (piros). Leolvashatók tehát a kritikus utak: SADEFT és SADET. (Kritikus út: ha bármelyik számot ezeken növeltük volna, akkor nőtt volna a minimum idő is. Tehát a kritikus út élein a számot pontosan be kell tartani.)

1. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy* n *csúcsú egyszerű reguláris gráf, akkor χ(G) +χ(G’) ≤ n+1! (G’ a G komplementerét jelöli.)*

Tegyük fel, hogy a gráf Δ-reguláris! Mohó színezés szerint: χ(G) ≤ Δ+1*.* Átgondolva könnyű látni, hogy χ(G’) ≤ n-1-Δ*.* Ha ezeket az összefüggéseket behelyettesítem az állításba, akkor n *≤* n+1 kapom, ami pedig minden n-re igaz.

1. *Egy legalább két csúcsú teljes gráf néhány, egy csúcshoz illeszkedő élét elhagyjuk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráf perfekt!*

Egy ilyen gráf komplementerében egyetlen (az elhagyott) csúcsra illeszkednek az élek. Ebből következően a komplementer páros gráf, hiszen fa. Ha azonban G komplementer páros, akkor G is páros, mert páros gráf komplementere is páros. Páros gráfok pedig perfektek.

1. *Legyen G 100-reguláris 2001 ponton! Határozzuk meg G élkromatikus számát (χ’(G)-t)!*

Ha 100-reguláris, akkor 100 ≤ χ’(G), mert az egy csúcsból kiinduló éleknek különböző színt kell adni. Ugyanakkor Vizing tétele szerint (G egyszerű): χ’(G) ≤ Δ+1=101. Azaz 100 ≤ χ’(G) ≤ 101.

|E(G)| = (100\*2001)/2 = 100050 él.

Minden színt legfeljebb 2001/2-ször használhatok fel, mert minden élnek 2 csúcsa van. Azaz minden színt maximum 1000-szer lehet felhasználni. 100 színnel csak 100000 él színezhető ki, tehát ebből következően χ’(G) = 101.

1. *Perfekt-e az alábbi gráf?*

Ez lényegében egy 8 hosszú körben a kettő távolságú pontok összekötve. Ezt az előző gyakorlaton láttuk. Beláttuk, hogy χ(G)=4, ω(G)=3. Tehát nem teljesül a perfekt gráf létezésének feltétele. (Lásd a feladatot: BSZ\_gyakorlat(4).rft-ben a feladatok között a másodikat!)

Vagy: szerepel benne 5 hosszú kör feszített részgráfként. Ezért nem perfekt. (Ez a „Sejtés”-nek az „odafelé” iránya, ami jól használható!)

# *Hálózati folyamok, pont -és élösszefüggőség*

# 2002. március 29.

(Marx Dániel)

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Hálózati folyam: forrás (s) és nyelő (t), közbülső pontok -> köztük irányított élek, mindegyiknek van kapacitása (c).

Folyam: minden élre valamilyen mennyiséget teszünk; minden pontra a befolyó kapacitás = kifolyó kapacitás!!!

Maximális folyam keresésének algoritmusa (vázlatos; bővebben a jegyzetben): minden élre 0-t veszek kapacitásként; majd javítógráfot készítek: csúcsai ugyanazok, mint az eredetiben, él pedig akkor van két csúcs között, ha még lehet A-ból B-be többet átvinni; kapacitás tehát annyi lesz, amennyit még át lehet vinni. (Ez az első lépésben minden élen a c értéke lesz.) Most irányított utat keresek s-ből t-be (javítóút). Ezen a legkisebb értékkel még növelhető a kapacitás, azaz a folyamérték. Ezt folytatom addig, amíg végül nem található javítóút.

Tétel: Max. folyamérték = minimális vágás kapacitása

Tétel: max. folyamérték ≤ min. vágás kapacitása

Pontösszefüggőség: k-szorosan pontösszefüggő a G gráf, ha legalább (k+1) csúcsa van, és akárhogy hagyunk el (k-1) csúcsot, összefüggő marad.

Élösszefüggőség: k-szorosan élösszefüggő a G gráf, ha akárhogy hagyunk el (k-1) élet, összefüggő marad.

Ha G k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is.

Megjegyzés: összefüggő jelentése mindig pontösszefüggőség.

# FELADATOK

1. *Adjunk meg egy maximális folyamot az alábbi hálózatban:*

2

5

6

7

9

s

t

4

7

6

Az előbb ismertetett algoritmust alkalmazva lehet megoldani a feladatot, a rajzolás nehézkessége miatt azonban ezeket a lépéseket nem adom meg. Az eredmény ellenőrzésére: max. folyamérték: 2+6=8.

1. *Határozzuk meg, hogy melyik az a legnagyobb k érték, amire k-szorosan pont-, illetve élösszefüggők az alábbi gráfok:*

* *n≥2 hosszú út*
* *n≥3 hosszú kör*
* *Kn (n≥4) teljes gráf!*

n hosszú út esetén egyszeresen pont –és élösszefüggő a gráf

kétszeresen pont –és élösszefüggő a kör

(n-1)-szeresen pont –és élösszefüggő a teljes gráf

Bizonyítás: belátjuk K5-re. Tegyük fel, hogy nem négyszeresen élösszefüggő. Azonban elhagyható 3 él, hogy x-ből y-ba lehessen jutni (bármely x, y-ra): bármely pontpár között van 4 éldiszjunkt út => ha elhygaunk 3 élet, akkor legfeljebb 3 utat teszünk tönkre => élösszefüggő marad. Tehát K5 mégis négyszeresen élösszefüggő. Hasonlóan belátható ez bármely n-re is.

1. *Határozzuk meg az alábbi gráf élösszefüggőségi számát! Legalább hány élet kell behúznunk, hogy ez eggyel növekedjen?*

Már egyetlen él elhagyásával is két komponensre esik szér, tehát 1-szeresen élösszefüggő.

Hogy kétszeresen élösszefüggő legyen, 2 újabb él behúzása elegendő (piros). Bizonyítás: van benne Hamilton-kör, tehát kétszeresen összefüggő, így kétszeresen élösszefüggő is.

1. *Mutassunk olyan egyszerű gráfot, ami csak egyszeresen pontösszefüggő, de hatszorosan élösszefüggő!*

7 csúcsú teljes gráf hatszorosan élösszefüggő, a csillag pedig egyszeresen pontösszefüggő. Tehát például két K7 egy csúcsnál “összeragasztva” éppen megfelel.

1. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább n/2, akkor kétszeresen összefüggő!*

Dirac tételét felhasználva létezik a gráfban Hamilton-kör, tehát kör létezik a gráfban. n hosszú kör 2 –szeresen pontösszefüggő.

1. *Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre Kn,n teljes páros gráf k-szorosan pontösszefüggő?*

Minden csúcs foka n; 2n csúcs van. Ekkor (n-1) pontot elhagyva még pontösszefüggő lesz (vagy alul vagy felül marad minimum 1 csúcs, azaz felsőből az alsóba el lehet jutni).

Tehát legalább n-szeresen összefüggő. (n+1)-szeresen nem összefüggő, mert akkor izolált pontok maradnak a felső n csúcsot elhagyva.

Megjegyzés: felső és alsó itt a pontosztályokat jelentik a páros gráfban, mindkét pontosztály mérete értelemszerűen n.

1. *Egy hálózat a kocka élhálózata az ábrán látható irányítással. A forrás és a nyelő a kocka két átellenes pontja, lásd az ábrán. Az éleket 1 vagy 2 kapacitásúnak választhatjuk meg a következő feltételek mellett:*

* *az elérhető maximális folyam érték a lehető legnagyobb legyen,*
* *az első feltétel teljesülése mellett minél kevesebb 2 kapacitású él legyen.*

*Hány 2 kapacitású élre van szükség, és melyek lesznek ezek?*

A maximális folyamérték 6 lehet, mert egy csúcsból max. 3\*2 indulhat. Így tehát a nyelőre és a forrásra illeszkedő éleknek 2-es kapacitás kell, különben egy 6-nál kevesebb értékű vágás lenne.

Ez a hat pedig tényleg elegendő. Tehát 6 darab 2-es kapacitású él kell.

1. *Mutassuk meg, hogy egy k-szorosan összefüggő n-pontú gráfnak k\*n/2 éle van!*

Minden csúcsnak legalább k szomszédja van, mivel (k-1) elhagyható, hogy összefüggő maradjon. Tehát G k-szorosan összefüggő.

Fokszámösszeg = az élek számának kétszerese. Esetünkben a fokszámösszeg ≥ k\*n. Ezt a képletbe behelyettesítve és rendezve kapjuk az állítást, ami tehát helyes.

# *Algebra*

# 2002. április 5..

(Marx Dániel)

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Prímszám: p | ab => p | a vagy p | b.

Törtszám: p nem bontható xy szorzatra, hogy x,y > 1

TÉTEL: prímszám = törzsszám

Legnagyobb közös osztó: (a,b) => euklideszi algoritmussal meghatározható

d(n) = (α1 + 1) \* (α2 + 1) \* ... \* (αk + 1), ahol d(n) n osztóinak száma, pk prím (αk + 1) különböző hatványon szerepel: 0,1,2,… αk

n = p1α1\*p2α2\*... \*pkαk

[a,b] = (a\*b)/(a,b)

Euklideszi algoritmus:

(396,210) = ?

396=210\*1+186

210=186\*1+24

186=24\*7+18

24=18\*1+6

18=6\*3+0 => vége! (a legnagyobb közös osztó a 6)

# FELADATOK

1. *Mennyi 396 és 210 legnagyobb közös osztója? És a legkisebb közös többszöröse?*

Lásd az előbb bemutatott módon az euklideszi algoritmussal. Legkisebb közös többszörösre képlet: (396\*210)/(396,210) = 396\*210/6.

1. *Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan háromjegyű szám, melynek az osztóinak száma osztható 11-gyel!*

Legalább 11 osztónak kell lenni (a d(n) képlet alapján): 11 | d(n)

Valamely szorzótényező a 11 kell legyen: αi = 10, ahol a lehető legkisebb alap a 2. Azaz 210. Ez azonban 1024, ami már nem háromjegyű. Ezzel indirekten bebizonyítottuk az állítást.

1. *Legyen a és b páratlan. Mennyi (a2+b2,4)?*

Páratlan szám négyzete páratlan; két páratlan szám összege páros. Így a 2 biztosan lehetséges közös osztó. Lehet-e azonban a 4 is? (2k+1)2+(2l+1)2 = 4(k2+k+l2+l)+2. Ez néggyel osztva kettőt ad maradékul. Így a legnagyobb közös osztó a 2.

1. *Melyik az a legkisebb háromjegyű szám, amelyiknek ötször annyi páros osztója van, mint páratlan?*

d(n ) képletét felhasználva kapom, hogy (felteszem, hogy p1 a lehető legkisebb, azaz 2, így α0 = 0)

d(plan) = (α2+1) \* (α3+1) \* ... \* (αk+1)

d(páros) = 5 \* (α2+1) \* (α3+1) \* ... \* (αk+1)

Összesen: 6(α2+1) \* (α3+1) \* ... \* (αk+1) = (α1+1) \* (α2+1) \* … \* (αk+1); azaz: α1+1=6, vagyis α1=5.

Háromjegyű szám kell: ha y=2, akkor 25=32, 3-mal szorozva még kétjegyű, de öttel szorozva már 160. Ez a legkisebb, feltételt kielégítő szám.

1. *Melyek azok a prímszámok, amelyekre p+10 és p+14 is prímszám?*

P, p+10, p+14 hárommal osztva három különböző maradékot ad: k, k+1 és k+2. Azaz az egyik a háromból biztosan osztható hárommal. Hárommal osztható prímszám csupán a 3. Érthető, hogy csak a p=3 lehetséges. Ekkor a megoldás: 3,13,17.

1. *Bizonyítsuk be, hogy d(n+1) ≥ 2d(n) végtelen sok n-re teljesül!*

Prímszámnak két osztója van. Legyen a prím az n. Ekkor 2d(n)=4. Prímet követő párosnak a négytől eltekintve legalább 4 osztója van. Mivel végtelen sok prím létezik, ezért végtelen sok páros követi. Azaz végtelen sok n-re teljesül az állítás.

1. *Határozzuk meg az összes olyan 1 < n ≤ 100 egész számot, amelyekre teljesül, hogy n osztóinak száma háromhatvány!*

d(n) képletét alkalmazva: a feltétel szerint d(n) minden tényezője 3 kell legyen, csak így lehet szorzatuk háromhatvány: αi+1=3 => αi=2.

Ekkor adódik a 4 és a 36 a feltételnek megfelelően.

1. *Lehet-e 4 egymás utáni prímszám összege prím?*

a, b, c, d prímek, tehát páratlanok. A+b páros, c+d szintén; páros + páros = páros. Külön kell még vizsgálni azt, ha a=2, ekkor az őt követő prímek: 3,5,7. Ezek összege páratlan. Tehát ez az egyetlen eset OK.

# *Kongruencia, Euler-Fermat-tétel*

# 2002. április 12.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *A b és c számok relatív prímek, és különbségük osztható 5-tel. Igazoljuk, hogy b+c és 2b+7c is relatív prímek!*

Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy létezik közös prím osztójuk. p | b+c és p | 2b+7c. Ebből p | 2b+7c-2(b+c) => p | 5c. (mert p különbséget is oszt.)

Mivel p prím, vagy p | 5 vagy p | c. Az első esetben: 5 | b+c és 5 | b-c. 5 | 2b és 5 | 2c. Ebből kapjuk, hogy 5 | b és 5 | c, azaz (b,c) = 1 nem áll fenn, ellentmondásra jutottunk. A második esetben p | b+c, melyből p | b. Azaz ugyanarra az ellentmondásra jutottunk. Tehát az eredeti állítás igaz!

1. *Maximum hány szám választható ki 1-től 2n-ig úgy, hogy semelyik kettő se legyen relatív prím?*

Összes páros szám: n darab. Mindegyiknek van 1-nél nagyobb osztója.

k és k+1 relatív prím! d | k, d | k+1. Ebből d | (k+1)-k, azaz d | 1 => d=1. Nem lehet két szomszédos szám kiválasztva, tehát maximum n választható ki.

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Kongruencia: (Jele: ≡)

* a ≡ b (mod m) ⬄ m | a-b
* d\*a ≡ d\*b (d\*m) ⬄ a ≡ b (mod m)
* d\*a ≡ d\*b (m) és (d, m)=1 ⬄ a ≡ b (m)
* ax ≡ b (m)
  + létezik megoldás <=y (a,m) | b
  + ha létezik megoldás, akkor a megoldások száma: (a,m) db ( azaz a és m közös osztóinak száma)

Euler-Fermat-tétel:

(a,m)=1; aφ (m) ≡ 1 (mod m), ahol φ(m) az m-nél kisebb relatív prímek száma.

m = p1α1\*p2α2\*... \*pkαk esetén φ(m) = m(1-1/p1)(1-1/p2)…(1-1/pk)

# FELADATOK

1. *Az x ≡ 2 (mod 3) és az x ≡ 5 (mod 6) állítások közül melyik következik a másikból?*

A másodikból az első. (Át kell gondolni a kongruencia definíciója alapján.)

1. *Oldjuk meg a 2x ≡ 2 (mod 12) és a 2x ≡ 2 (mod 13) kongruenciákat!*

2x ≡ 2 (12)

x ≡ 1 (6)

x ≡ 1 (12) és x ≡ 7 (12)

2x ≡ 2 (13)

x ≡ 1 (13)

1. *Hány megoldása van a 6x ≡ 4 (mod m) kongruenciának az m=9,10,11 esetben?*

Felhasználva az elméleti részben leírtakat:

m=9: nincs megoldás

m=10: 2 megoldás (x ≡ 4 (10); x ≡ 9 (10))

m=11: 1 megoldás (x ≡ 8 (11))

1. *Megoldható-e a 6x ≡ 10 (mod 15) illetve a 6x ≡ 9 (mod 15)? Ha igen, akkor oldjuk meg!*

Elsőnek nincs meoldása.

Második: három megoldás létezik:

6x ≡ 9 (15)

2x ≡ 3 (5)

2x ≡ 8 (5)

x ≡ 4 (5)

Tehát a megoldás: x ≡ 4 (15); x ≡ 9 (15); x ≡ 14 (15).

1. *Bizonyítsuk be, hogy 3716-1 osztható 5-tel!*

Euler-Fermat-tétel felhasználásával: (5,37)=1 => 37φ(5) ≡ 1. Ahol φ(5)=4.

Ebből: 374≡ 1 (5)

3716 ≡ 1 (5) => 3716-1 ≡ 0 (mod 5). Az állítást bebizonyítottuk.

1. *Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor n8-1 vagy n8+1 osztható 17-tel!*

Euler-Fermat-tétel: (17,n)=1 => φ(17)=16;

n16 ≡ 1 (17)

17 | n16-1, ahol n16-1= (n8-1) \* (n8+1). Ha prím szorzatot oszt, akkor a tényezők valamelyikét osztja. Ezzel az állítást beláttuk.

1. *Oldjuk meg a 326x ≡ 2 (mod 29) kongruenciát!*

Egyetlen megoldás lesz.

Euler-Fermat-tétel: (3,29)=1;

3φ(29) ≡ 1 (29), ahol φ(29)=28.

Azaz 328 ≡ 1 (29) => 29 | 328-1.

(9,29)=1: 9\*326x ≡ 18 (29)

328x ≡ 18 (29)

1\*x ≡ 18 (29) a megoldás.

1. *Mennyi x?*

*a) 53202 ≡ x (mod 17)*

*b) 4949 ≡ x (mod 15)*

*c) x12001 ≡ 5 (mod 13)*

*d) x11999 ≡ 5 (mod 13)*

1. Euler-Fermat-tétel segítségével: x ≡ 25 (17)
2. Euler-Fermat-tétel segítségével: x ≡ 4 (15)
3. Ha (x,13) ≠ 1 => 13 | x => nem teljesül a feltétel

Ha (x,13) = 1 => Euler-Fermat-tétellel: φ(13)=12. x12 ≡ 1 (mod 13) => x12\*100\*x ≡ 5 (13).

A megoldás tehát: x ≡ 5(mod 13).

d) Hasonlóan az előzőhöz; megoldás: x ≡ 8 (mod 13).

# *Csoportelmélet*/*1*.

# 2002. április 19.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *Milyen n-ekre teljesül, hogy 2φ(n)=n?*

Biztos, hogy n páros. Ekkor n felírható: 2α1\*p2α2\*p3α3\*…\*pkαk. Akkor ezt felhasználva a φ(n) számítási képletéhez kapom, hogy φ(n)=n\*(1-1/2)\*(1-1/p2)\*…\*(1-1/pk). n\*(1-1/2) tag értéke éppen n/2, a többi tényező együttesen <=1. Az állítás csak abban az esetben lehet igaz, ha ez az érték éppen 1. Azaz ha csak a 2 szerepel a prímtényezős felbontásban. Tehát az állítás a 2 hatványaira teljesül.

1. *Bizonyítsuk be, hogy ha n egy 10-hez relatív prím pozitív egész, akkor létezik olyan többszöröse, melynek valamennyi számjegye 9-es!*

(n,10)=1; létezik c, hogy c\*n csak 9-esből áll. Tudjuk, hogy a 10k-1 alakú számokra teljesül, hogy csak 9-esekből állnak. Tehát 10k-1=c\*n (k>0). Azaz 10k-1≡0 (mod n), vagyis 10k≡1 (mod n). Erre már alkalmazható az Euler-Fermat-tétel, mégpedig: a=10; m=n. 10φ(n)≡1 (mod n). Azaz n | 10φ(n)-1. Ez pedig éppen csupa kilencesekből áll.

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

[S, \*], ahol S halmaz, \* pedig művelet.

Félcsoport: zárt a műveletre nézve: a\*b marad S-ben; asszociatív: (a\*b)\*c=a\*(b\*c)

Csoport: zárt; asszociatív; létezik egységelem: a\*e=e\*a=a; minden a-hoz létezik inverz elem: a\*a-1=a-1\*a=e

Lehetnek még kommutatívok: a\*b=b\*a (ABEL csoport); véges vagy végtelen sok eleme lehet

ELEM RENDJE: a1, a2, a3, a4… ak, ak+1, ak+2,… Itt ak=e. Elem rendje: σ(n)= legkisebb k, hogy ak=e.

Megjegyzés: ak+1= ak\*a=e\*a=a; ak+2=a2

Ciklikus csoport: *a* hatványai megadják az összes elemet; olyan csoport, melyben létezik olyan a elem, melynek rendje megegyezik a csoport rendjével. (Megjegyzés: nagyobb nem lehet: lásd Lagrange tétele)

Részcsoport: H részcsoportja G-nek, ha ő is részcsoport: azaz zárt és létezik inverz elem.

# FELADATOK

1. *Legyen S az n+0i, illetve a 0+ni (n egész) alakú komplex számok halmaza. Zárt-e ez a halmaz az összeadásra nézve? És a szorzásra?*

n+0i esetében az összeadásra nézve: egész + egész = egész; minden egész felírható komplex alakban => zárt; szorzásra nézve hasonlóan;

0+ni esetében összeadásra nézve zárt, mert komplex + komplex komplex marad; szorzásra nézve nem zárt, mert például n=2 és n=3 esetén a valós rész nem nulla.

1. *Legyen a valós számok halmazán értelmezve a következő művelet: a \* b = ab + a + b. Vizsgáljuk meg, hogy ez a művelet asszociatív-e, kommutatív-e, van-e egységeleme és hogy invertálható-e.*

Asszociatív? (ab+a+b)\*c=(ab+a+b)+ab+a+bC=abc+ac+bc+ab+a+b+c;

a\*(b\*c)= a\*(bc+b+c)= abc+ab+ac+a+bc+b+c

Mivel ezek egyenlőek, asszociatív.

Kommutatív? a\*b=ab+a+b; b\*a=ba+b+a => kommutatív

Egységelem: a\*e=ae+a+e=a=e\*a

azaz: ae+e=0 => e(a+1)=, azaz e=0 az egységelem.

Inverz? a\*a-1=aa-1+a+a-1=e=0 => a-1(a+1)+a=0 akkor teljesül, ha a=-1 és a=0 egyszerre. Ez pedig lehetetlen, tehát nincs inverz!

1. *Zárt-e az irracionális számok halmaza az összeadásra? Zárt-e a pozitív racionális számok halmaza az osztás műveletre? Van-e pozitív racionális számok körében minden számnak inverze a szorzásra nézve? Van-e nemnegatív egészek körében minden számnak inverze az összeadásra nézve?*
2. nem: -√2+√2=0 nem irracionális
3. igen
4. reciprok
5. nem, mert negatív inverz kellene: 2-nek a (-2) lenne az inverze
6. *Mi az egyes elemek rendje a 12 rendű ciklikus csoportban?*

Definíciót felhasználva könnyű dolgunk van: periodikusság 12 szerint, mert a12=e. a1-nek 12, a2-nek 6, a3-nak 4, a6-nak 2, a5-nek 12, a7-nek 12, a10-nek 6…stb

1. *Mutassuk meg, hogy az 5 X 5-ös nemnulla determinánsú mátrixok csoportot alkotnak a szorzás művelettel!*

Zárt: 5 X 5-ös mátrixot 5 X 5-ös mátrix-szal szorozva 5 X 5-ös mátrixot kapok; determinánsa a determinánsok szorzástétele miatt nemnulla: det(AB)=detA\*detB.

Asszociatív: mátrix szorzás az

Egységelem: egységmátrix; detE=1 (nemnulla)

Inverz: ha detA nem nulla, akkor létezik az inverzmátrix, ami éppen megfelel

Mivel a csoportaxiómák együttesen teljesültek, valóban csoportról van szó.

1. *Az n-ed rendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemekt összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?*

Kezdetben: a1, a2, … an. Négyzetre emelve: a2, a4, … a2n. Összeszorozva a kapott elemeket: a2a4a6…a2n=a(2+4+6+…+2n)=a2Σi=a2\*n(n-1)/2=an(n-1)=an(n-1)=e(n-1)=e.

# *Csoportelmélet*/*2.*

# 2002. április 26.

(Marx Dániel)

*Az előző gyakorlathoz tartozó feladatok:*

1. *Legyen a és b egy csoport két tetszőleges eleme. Mutassuk meg, hogy b rendje megegyezik a-1ba rendjével!*

(a-1ba)k=(a-1ba)(a-1ba)…(a-1ba)=(a-1)kbkak=a-1b(aa-1)b(aa-1)b…b(aa-1)ba=a-1bka

Először azt bizonyítjuk, hogy ha bk egységelem => (a-1ba)k is egységelem:

(a-1ba)k=a-1bka=a-1ea=e=(a-1ba)k

φ(b)>=φ(a-1ba)

Másodszor azt látjuk be, hogy: ha (a-1ba)k=e => bk=e:

(a-1ba)k=a-1bka=e. Balról a-val, majd jobbról a-1-gyel szorozva a megfelelő egyszerűsítések után kapom:

bkaa-1=aea-1 => bk=e.

φ(b)<= φ(a-1ba).

A kettőből együtt adódik, hogy φ(b)=φ(a-1ba).

# A SZÜKSÉGES ELMÉLETI ANYAG

Ciklikus csoport: *a* hatványai megadják az összes elemet; olyan csoport, melyben létezik olyan a elem, melynek rendje megegyezik a csoport rendjével. (Megjegyzés: nagyobb nem lehet: lásd Lagrange tétele)

Részcsoport: H részcsoportja G-nek, ha ő is részcsoport: azaz zárt és létezik inverz elem.

Lagrange tétel: ha *a* a G csoport eleme, akkor φ(a) | |G| fennáll, azaz akkor g rendje osztója a csoport rendjének.

# FELADATOK

1. *Tudjuk, hogy a G csoport rendje 100, a g elemére pedig teljesül, hogy g21=e. Mit mondhatunk g-ről?*

|G| =100; g21=e => φ(g)=?

Definíció szerint: gk=e, hogy k legkisebb legyen. Ekkor k lehet 21, 7, 3 és 1. Azonban Lagrange tételével egybevetve csak a k=1 lehetséges.

1. *Legyen G egy kommutatív csoport és k rögzített pozitív egész szám. Jelölje U azon elemek halmazát, amelyek előállnak valamely G-beli elem k-adik hatványaként, vagyis U = {u ∈G: ∃g∈G, gk=u}. Mutassuk meg, hogy U részcsoport G-ben!*

Részcsoport tulajdonságait kell belátni:

zárt: mivel G kommutatív, azért ha u1 és u2 is U eleme, akkor g1k és g2k elemeket kapom; u1\*u2=g1k\*g2k=(g1\*g2)k, az pedig halmazbeli.

inverz: u-1=(g-1)k mert u\*(g-1)k=gk\*(g-1)k=(g\*g-1)\*(g\*g-1)\*…=e.

1. *Igazoljuk, hogy minden prím rendű csoport ciklikus!*

Lagrange tételét felhasználva (φ(a) | |G| = p prím. Ekkor φ(a)= 1 vagy φ(a)= p. Ha φ(a)=p, akkor φ(a)=|G|, azaz a csoport ciklikus. Ha φ(a)=1, akkor minden elem rendje 1, ez pedig nem prím. Tehát valóban minden prím rendű csoport ciklikus.

1. *Legyen G a komplex számok csoportja az összeadásra nézve, H pedig a valósok csoportja az összeadásra nézve.*
   1. *Mutassuk meg, hogy H részcsoport!*
   2. *Mik G-ben a H szerinti mellékosztályok?*
   3. *Mutassuk meg, hogy H normálosztó is és határozzuk meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport!*
2. H nyilván zárt, mert valós + valós is valóst eredményez; létezik ellentettje, amely az inverznek felel meg. Tehát akkor H részcsoport!
3. G-ben a H szerinti mellékosztályok: ha a komplex számsíkot elképzeljük, akkor H a vízszintes tengely; ezzel párhuzamosan helyezkednek el a mellékosztályok: gH=Hg.
4. jobboldali mellékosztály: végtelen sok létezik az előbbiek miatt (vízszintes egyenesek)

baloldali mellékosztályok: gH=Hg, mert kommutatív, azaz ez is végtelen.

H pedig így normálosztó, mert baloldali mellékosztályok megegyeznek a jobboldali mellékosztályokkal.

KOMMUTATÍV CSOPORTBAN MINDEN RÉSZCSOPORT NORMÁLOSZTÓ!

Faktorcsoport: két mellékosztályt úgy műveletezek össze (adok össze), mintha távolságokat adnék össze => H-val izomorf (valós!) a faktorcsoport.

1. *Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, aminek a 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív!*

φ(g)= 1, 3, 9, 27, 81. Ha g27 nem egységelem, akkor csak a 81 lehet az elem rendje, különben a kisebbek is egységelemek lennének. Ekkor azonban |G|=φ(g)=81, tehát a csoport ciklikus. Ciklikus csoport pedig kommutatív: minden a felírható a=gk; minden b felírható b=gl. Ekkor teljesül a kommutativitás feltétele: a\*b=gk\*gl=g(k+l) és b\*a=gl\*gk=g(l+k).