

1. feladat (5+6=11 pont)

- a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$? (Mondja ki a definíciót!)
- b) A definícióval igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{|x^2-9|} = -\infty$!

2. feladat (12+12=24 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-5)^2}}, & \text{ha } x \geq 0, \\ \frac{\sin^2(3x)}{2x^2}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

- a) Hol és milyen típusú szakadásai vannak az f függvénynek?
- b) Hol deriválható az f függvény? (Indokoljon!) Adja meg f deriváltját ott, ahol létezik!

3. feladat (10+4+5=19 pont)

$$f(x) = 5\pi - \arcsin(3x - 2)$$

- a) Határozza meg f értelmezési tartományát, értékészletét, deriváltját!
- b) Indokolja meg, miért létezik f inverze!
- c) Adja meg az f^{-1} inverz függvényt, annak értelmezési tartományát és értékészletét!

4. feladat (6+7+7+6=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(5x)}{\arcsin(2x)} =? & b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) =? \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} =? & d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \operatorname{sh}(5x)}{\operatorname{ch}(6x)} =? \end{array}$$

5. feladat (7+8+5=20 pont)

$$f(x) = x^2 e^{3x}$$

- a) Jellemezze a függvényt monotonitás szempontjából! Adja meg a függvény lokális szélsőérték helyeit!
- b) Jellemezze a függvényt konvexitás szempontjából! Hol van a függvénynek inflexióspontja?
- c) Vázlatosan rajzolja fel a függvény grafikonját!

IMSC feladat (8 IMSC pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ ahol } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ és a tört nem egyszerűsíthető;} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hol és milyen típusú szakadásai vannak a fenti függvénynek?