

6. Gyakorlat

Méréselmélet 1. zárthelyi

2022. március 21.

(120 perc)

1. N zajos megfigyelésre alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában a $\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ vagy a $\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ diszkrét időfüggvényű jel van-e jelen? A zaj additív, Gauss eloszlású, nulla várható értékű, $\sigma_w = 0.5$ szórású fehér zaj. H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy a $\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.9$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy a $\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.1$. A költségek: $C_{10} = C_{10} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját, és a hozzátartozó döntési küszöb értékét (max. 5 pont)! Számítsa ki az előfeldolgozás súlytényezőit és a döntési küszöb numerikus értékét $N = 3$, és $n = 0, 1, 2$ diszkrét időpontokban vett minták esetére (max. 3 pont)!

Megoldás:

$$f\{z|H_0\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_w)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2}, \quad f\{z|H_1\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_w)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2}$$

A megfigyelt értékeket behelyettesítjük a log-likelihood arány függvénybe, és ha $\ln\Lambda(z) > \ln\eta$, akkor a döntés H_1 , ha $\ln\Lambda(z) < \ln\eta$, akkor a döntés a H_0 .

$$\ln\Lambda(z) = \ln f\{z|H_1\} - \ln f\{z|H_0\} = -\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2 \underset{H_0}{\underset{H_1}{> <}} \ln\eta$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z_n \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right) \underset{H_0}{\underset{H_1}{> <}} \frac{\sigma_w^2}{N} \ln\eta + \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \right) = \frac{\sigma_w^2}{N} \ln\eta + \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) \right)$$

$$\eta = \frac{0.9(10 - 1)}{0.1(10 - 1)} = 9,$$

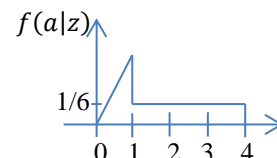
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}0\right) = 1; \cos\left(\frac{2\pi}{3}1\right) = -0.5; \cos\left(\frac{2\pi}{3}2\right) = -0.5; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}0\right) = 0; \sin\left(\frac{2\pi}{3}1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\left(\frac{2\pi}{3}2\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}0\right) = 1; \cos\left(\frac{4\pi}{3}1\right) = -0.5; \cos\left(\frac{4\pi}{3}2\right) = -0.5;$$

Ezekkel az előfeldolgozás és a döntési küszöb:

$$\frac{1}{3}\left(z_0 - \left(0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 - \left(0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\right) \underset{H_0}{\underset{H_1}{> <}} 0.33z_0 - 0.455z_1 + 0.122z_2 > 0.1831$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) értékét! Határozza meg az \hat{a}_{MS} becslő varianciáját (max. 3 pont)?



Megoldás:

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z) da = \int_0^1 a^2 da + \int_1^4 \frac{1}{6} a da = \left[\frac{a^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{a^2}{12}\right]_1^4 = \frac{1}{3} + \frac{15}{12} = 1\frac{7}{12} \approx 1.583, \quad \hat{a}_{ABS} = 1, \text{ mert}$$

a sűrűségfüggvény alatti terület $0 - 1$ között 0.5 , $1 - 4$ között ugyancsak 0.5 . $\hat{a}_{MAP} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}_{MS}) &= E[a^2] - \hat{a}_{MS}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z) da - \hat{a}_{MS}^2 = \int_0^1 a^3 da + \int_1^4 \frac{1}{6} a^2 da - \hat{a}_{MS}^2 = \\ &= \frac{a^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{a^3}{18} \Big|_1^4 - \hat{a}_{MS}^2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{2} - \left(1 \frac{7}{12}\right)^2 = 3.75 - 2.507 \cong 1.243 \end{aligned}$$

3. Additív, Gauss eloszlású zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, várható értéke nulla, de a szórása ismeretlen. Torzítatlan-e a következő becslés (max. 3 pont)? Ha igen, akkor mekkora a torzítás (max. 1 pont)?

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \widehat{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - \hat{A})^2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Mivel $E\{z_k\} = A$, ezért a A paraméter becslése torzítatlan. Mivel

$$\begin{aligned} E\{\widehat{\sigma^2}\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E\{(z_k - A - (\hat{A} - A))^2\} = \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} E\{(z_k - A)^2\} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(z_k - A) \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (z_j - A)\right\} + \sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (z_i - A)\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (z_j - A)\right)\right\} \right] = \\ &= \frac{1}{N} [N\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2] = \frac{N-1}{N} \sigma^2, \end{aligned}$$

tehát a σ^2 paraméter becslése torzított. A torzítás:

$$E\{\widehat{\sigma^2}\} - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{N}.$$

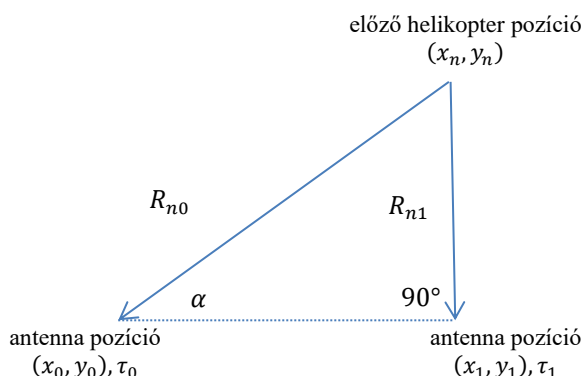
A levezetésnél felhasználtuk, hogy $E\{(z_k - A)^2\} = \sigma^2$, és $E\{(z_k - A)(z_j - A)\} = 0$, ha $j \neq k$.

4. Egy kételemű zajsorozat kovariancia mátrixa $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Vezesse le, hogy milyen tulajdonságú mátrixszal kell transzformálni a zajsorozatot, hogy a transzformált zajsorozat kovariancia mátrixa egységmátrix legyen (max. 1 pont)! Határozza meg a transzformáció mátrixának elemeit (max. 3 pont)!

Megoldás: $\mathbf{w}' = \mathbf{D}\mathbf{w}$, $E\{\mathbf{D}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{D}^T\} = \mathbf{D}E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^T = \mathbf{I}$. Egy lehetséges választás: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. Ezzel:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a(b + \rho c) \\ b + a\rho c & b(b + \rho c) + c(\rho b + c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{Innen}$$

$$\begin{aligned} a &= 1, & b &= -\rho c, \\ c &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}; & b &= \mp \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{aligned}$$



..

5. Helikoptert követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a vízszintes irányú pozíciót, mert a helikopter emelési feladatot lát el, tehát csak a magasság változás becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:

Méréselmélet gyakorlat, 2022. március 23.

$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. $\mathbf{a} = [x_s \ y_s]^T$. Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0, 1, \dots, N - 1$, adatai.

$$R_k \cong R_{nk} + \left. \frac{\partial R_k}{\partial x_s} \right|_{x_s=x_n} \delta x_s + \left. \frac{\partial R_k}{\partial y_s} \right|_{y_s=y_n} \delta y_s = R_{nk} + \cos(\alpha_k) \delta x_s + \sin(\alpha_k) \delta y_s,$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + \cos(\alpha_k) \delta x_s + \sin(\alpha_k) \delta y_s}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{\cos(\alpha_k) \delta x_s + \sin(\alpha_k) \delta y_s}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_{k-1})] \delta x_s + [\sin(\alpha_k) - \sin(\alpha_{k-1})] \delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1, \dots, N - 1.$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_{N-1}) - \cos(\alpha_{N-2}) & \sin(\alpha_{N-1}) - \sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{bmatrix} + \mathbf{w} = \mathbf{U} \mathbf{a} + \mathbf{w},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{w}, \quad \mathbf{C}_w = E[\mathbf{A} \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{A}^T] = \sigma_w^2 [\mathbf{A} \mathbf{A}^T].$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{bmatrix} = [\mathbf{U}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{z}, \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \sigma_w^2 [\mathbf{U}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a függőleges irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.05 \mu s$, $z_1 = -0.5 \mu s$ és $\alpha = 30^\circ$ (max. 4 pont)! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép tényleges magasságát is meg tudjuk határozni? (max. 1 pont)

Megoldás: $\mathbf{U} = \frac{1}{c} [\sin(90^\circ) - \sin(30^\circ)] = \frac{1}{2c}$, $\mathbf{A} = [-1 \ 1]$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = 2$, $\mathbf{C}_w = 2\sigma_w^2$, $\hat{a}' = \widehat{\delta y_s} = 2cz_1 = -300m$
 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = 8c^2 \sigma_w^2$, $\sqrt{\text{var}(\hat{a}')} = 15 * 2\sqrt{2} \cong 42,43m$. A mérőállomások földrajzi távolságának ismerete szükséges.

6. A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, ismert \mathbf{C}_w kovariancia mátrixú zaj, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. $N = 2$ esetére, amikor $\mathbf{C}_w = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, adja meg A MVU becslőjének és a becslés varianciájának explicit kifejezését!

Fontolja meg, hogy tudja-e használni a következő összefüggéseket:

$$\hat{\mathbf{a}}_{ML} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}, \quad \text{cov}(\hat{\mathbf{a}}_{ML}) = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$$

(max. 4 pont)!

Megoldás:

Mivel a megfigyelési egyenlet lineáris, és a csatornazaj Gauss eloszlású, ezért az ML becslő hatásos MVU becslő lesz.

$$\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 1 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{1 - 2r\rho + r^2}{1 - \rho^2}$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 1 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - r\rho}{1 - \rho^2} & \frac{r - \rho}{1 - \rho^2} \\ \frac{1 - r\rho}{1 - \rho^2} & \frac{r - \rho}{1 - \rho^2} \end{bmatrix}$$

Méréselmélet gyakorlat, 2022. március 23.

Ezzel

$$\hat{\mathbf{a}}_{ML} = \frac{(1 - r\rho)z_0 + (r - \rho)z_1}{1 - 2r\rho + r^2}, \text{cov}(\hat{\mathbf{a}}_{ML}) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2r\rho + r^2}$$

Megjegyzés:

Ha $r = 1$, akkor

$$\hat{\mathbf{a}}_{ML} = \frac{z_0 + z_1}{2}, \text{cov}(\hat{\mathbf{a}}_{ML}) = \frac{1 + \rho}{2}$$

7. Írja fel egy valós időben működőképes rendszert leíró, elsőrendű lineáris rendszer differenciaegyenletét! Származtassa a kimenet számításának jelfolyamgráfját, és állítsa elő annak azt a változatát, amely csak egyetlen késleltető elemet tartalmaz! Írja fel a rendszer állapotváltozós leírását is! Adja meg az állapotváltozós leírást a

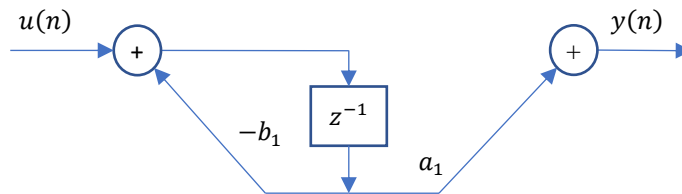
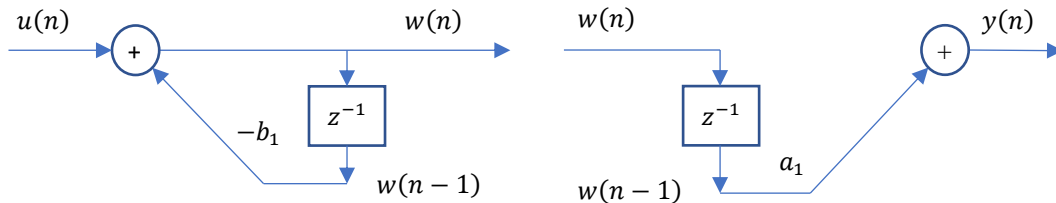
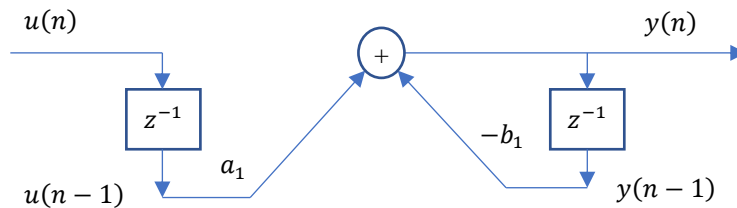
$$H(z) = \frac{(1 - r)z^{-1}}{1 - rz^{-1}}$$

átviteli függvényű rendszer esetére (max. 4 pont)! Tervezzen megfigyelőt, amely képes ezt a rendszert véges lépésben követni, és írj fel a megfigyelő átviteli függvényét (max. 3 pont)!

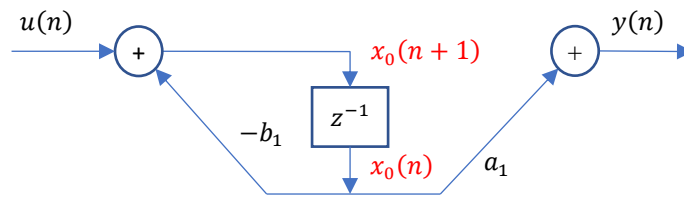
Megoldás:

$$y(n) + b_1y(n - 1) = a_1u(n - 1)$$

$$y(n) = a_1u(n - 1) - b_1y(n - 1)$$



Az állapotváltozós leírás:



$$\begin{aligned}x_0(n+1) &= -b_1 x_0(n) + u(n) \\ y(n) &= a_1 x_0(n)\end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-1}}$$

átviteli függvény esetén: $a_1 = 1-r, b_1 = -r$

A hibarendszer mátrixa: $A - GC = -b_1 - g_0 a_1, g_0 = -\frac{b_1}{a_1} = \frac{r}{1-r}$

A megfigyelő átviteli függvényének származtatása:

A megfigyelő kimenőjelének z-transzformáltja: $\hat{Y}(z) = (1-r)\hat{X}_0(z)$

A megfigyelő állapotváltozója z-transzformáltjának értéke a késleltető bemenetén:

$$z\hat{X}_0(z) = \frac{r}{1-r} [Y(z) - (1-r)\hat{X}_0(z)] + r\hat{X}_0(z) = \frac{r}{1-r} Y(z)$$

Ebbe behelyettesítve $\hat{X}_0(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{1-r}$ értéket:

$$H_{\text{megfigyelő}} = \frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = rz^{-1}$$