INFOANALÍZIS2 1.ZH JAV

2016 október 21.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^x.$$

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$y_p(x) = (Ax + B)e^x$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A + B)e^x + Axe^x, \\ y_p''(x) &= (2A + B)e^x + Axe^x. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{A - 5A + 6A}_{=2})xe^x + (\underbrace{2A + B - 5A - 5B + 6B}_{=0})e^x = 2xe^x.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = 1, \quad B = \frac{3}{2}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^x + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

2. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

Megoldás. Akár a hányados-, akár a gyökkritériummal próbálkozhatunk.
Gyökkritériummal $\boxed{\textbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \sqrt[n]{\left|\frac{n^k}{a^n}\right|} \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|a|}.\boxed{\textbf{2p}}$$

Ha $|a| < 1$, akkor a sor divergens $\boxed{\textbf{1p}}$, ha $|a| > 1$, akkor a sor abszolút konvergens $\boxed{\textbf{1p}}$, ha $|a| = 1$, akkor a gyökkritériummal nem tudjuk eldönteni, de az eredeti sorba akár $a = 1$-et $\boxed{\textbf{1p}}$, akár $a = -1$-et $\boxed{\textbf{1p}}$ írva nyilvánvalóan divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz.

---

3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= 3e^{2x}, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Gyökei $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{1p}}$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Külső rezonancia van, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, \\ y_p''(x) &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\textbf{2p}}$

$$(\underbrace{4A-2A-2A}_{=0})xe^{2x}+(\underbrace{4A-A}_{=3})e^{2x}=3e^{2x}.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\textbf{1p}}$

$$A=1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x)+y_p(x) \\ &= c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+xe^{2x}, \quad (c_1,c_2\in\mathbf{R}). \end{aligned}$$

A kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x)=e^{2x}+2e^{-x}+xe^{2x}. \quad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$y''-3y'+2y=x+e^x.$$

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Gyökei $\boxed{\textbf{1p}}$

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\textbf{1p}}$

$$y_h(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}.$$

Külső rezonancia van, ezért az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y_p(x)=(Ax+B)+Cxe^x$$

alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A+Ce^x+Cxe^x, \\ y_p''(x) &= Ce^x+Ce^x+Cxe^x. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$(\underbrace{2A}_{=1})x + (\underbrace{-3A+2B}_{=0})(\underbrace{C-3C+2C}_{=0})xe^x + (\underbrace{2C-3C}_{=1})e^x = x + e^x.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{4},\ C = -1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\begin{aligned} y_{iá} &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Megoldás. A sor pozitív tagú, ha konvergens, akkor egyben abszolút konvergens is. A tagok hatványok szorzatai, ez a hányados, vagy a gyökkritérium alkalmazását sugallja.
Gyökkritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \sqrt[n]{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} (\sqrt[n]{n})^2\frac{2}{3} \underset{\boxed{\mathbf{2p}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\sqrt[n]{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Hányadoskritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{(n+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{3} \underset{\boxed{\mathbf{2p}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{2}{3},$$

ugyanis $\frac{n+1}{n}$ 1-hez tart. Mivel $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ létezik, és kisebb mint 1 $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sor konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$.
