ANALÍZIS(2)
Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2003. június. 12.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

DE **1. feladat (10 pont)**

Határozza meg a

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 8x + 3y$$

differenciálegyenletrendszer általános megoldását!

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad : \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 16 = 0 \;(2) \Rightarrow 3-\lambda = \pm 4$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 7\,, \; \lambda_2 = -1 \quad (1)$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0} : (1) \quad \begin{matrix} -4 & 2 \\ \cancel{8} & \cancel{-4} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ \cancel{0} \end{matrix} \right. \Rightarrow -2s_{11} + s_{12} = 0 \quad s_{11} := 1\,;\; s_{12} = 2 \quad \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2)$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = \underline{0} : \quad \begin{matrix} 4 & 2 \\ \cancel{8} & \cancel{2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ \cancel{0} \end{matrix} \right. \Rightarrow 2s_{21} + s_{22} = 0 \quad s_{21} := 1\,;\; s_{22} = -2 \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1)$$

$$\underline{x} = C_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1)\,(1)\,(1)$$

$\int\sum$ **2. feladat (12 pont)**

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\,\sin(\pi(2n+1)x)}{3^{n+1}} \right) dx = ?$$

$\int\sum$ felcserélhető-e?

$f_n \in C^0_{[0,1]}$ és $\sum_1^\infty f_n(x)$ egyenletesen konv., mert

$|f_n(x)| = \frac{(2n+1)\,|\sin \ldots|}{3 \cdot 3^n} \le \frac{2n+1}{3 \cdot 3^n} = b_n$ (1) (1) és $\sum^\infty b_n$ konv.,

mert $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+3)\;3 \cdot 3^n}{3 \cdot 3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3}\,\frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1$ (2)

$\Rightarrow$ (Weierst. kr.) $\sum^\infty f_n(x)$ egyenl. konv.

(2)

Így szabad tagonként integrálni (1)

$$\int \sum \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2n+1}{3\cdot 3^n} \sin(\pi(2n+1)x)\, dx \; (1) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3\cdot 3^n} \left. \frac{-\cos \pi(2n+1)x}{\pi(2n+1)} \right|_0^1 (1) = \frac{-1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right) (\underbrace{-\cos(2n+1)\pi}_{=-1}+1) =$$

$$= \frac{-2}{3\cdot\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n (1) = -\frac{2}{3\pi} \frac{1/3}{1-1/3} (2) = -\frac{1}{3\pi}$$

$f\sum$ 3. feladat (15 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \sqrt[5]{1+3x^2}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát! (A sor első néhány tagját írja le részletesen!)

Becsülje meg azt a hibát, amit akkor vétünk, amikor az

$$\int_0^{1/2} \sqrt[5]{1+3x^2}\, dx \approx \int_0^{1/2} T_4(x)\, dx$$

közelítést alkalmazzuk! ($T_4(x)$ a negyedrendű Taylor polinom .)

$$f(x) = (1+3x^2)^{1/5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} (3x^2)^n (2) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} 3^n x^{2n} (1) =$$

$$= 1 + \frac{1/5}{1}\cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1/5(-4/5)}{1\cdot 2} 3^2 x^4 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} (2) \cdot 3^3 x^6 + \ldots$$

$$= \overbrace{1 + \frac{3}{5}x^2 (1) - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 x^4}^{T_4(x)} + 6\left(\frac{3}{5}\right)^3 x^6 - \ldots$$

$$|3x^2| < 1 \; (1) \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}} \; (1)$$

$$\int_0^{1/2} \sum_0^{\infty} \ldots = x + \frac{3}{5}\frac{x^3}{3} - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{x^5}{5} + 6\left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{x^7}{7} - \ldots \Big|_0^{1/2} (2) =$$

$$[0, \tfrac{1}{2}] \subset \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \; (1)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\frac{1}{3\cdot 2^3} - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{5\cdot 2^5}}_{:=a} + \underbrace{6\left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{1}{7\cdot 2^7}}_{:=b} - \ldots \approx a$$

$$|H| \le b = 6\left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{1}{7\cdot 2^7}$$ (2) (2) (Leibniz sorról van szó)

v1 030612/2.

nD 4. feladat (13 pont)

$$f(x,y) = 9x^2 + y^2 + xy + 7y$$

Hol teljesül a lokális szélsőérték létezésének a szükséges feltétele? (Írja le a feltételt!)
Hol teljesül a lokális szélsőérték létezésének az elégséges feltétele? (Írja le a feltételt!)
Milyen jellegű lokális szélsőértéke van f-nek?

Ⓣ $K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.
Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor

$$\mathrm{d}f(\underline{a},\underline{h}) = 0 \qquad \forall \ |\underline{h}| < \delta\text{-ra.}$$ 1

$f'_x = 18x + y$ 1 $18x + y = 0$

$f'_y = 2y + x + 7$ 1 $2y + x + 7 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 18x+y=0 \\ 2y+x+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \end{array}\right\}$$ 1

$P\left(\frac{1}{5}, -\frac{18}{5}\right)$-ben lehet lok. sz'.

$f''_{xx} = 18$ 1, $f''_{xy} = f''_{yx} = 1$ 1; $f''_{yy} = 2$ 1

$$D(x,y)\Big|_P = \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 35 > 0 \Rightarrow \text{van lok. sz'}$$ 1 1 1

$f''_{xx}\big|_P > 0 \Rightarrow$ lok. min. van 1

Elégséges tétel lokális szélsőérték létezésére speciálisan kétváltozós függvényre:

Ⓣ Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$$D(x,y) := \left|\underline{\underline{H}}(x,y)\right| \ \left(= \det \underline{\underline{H}}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték:
$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$: lok. min. 2
$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$: lok. max.

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték
$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges)

(¬B)

v1 030612/3.

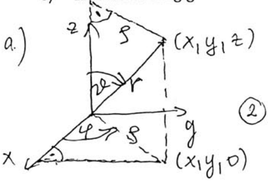
$n\int$ **5. feladat (18 pont)***

a) * Ismertesse a gömbi koordinátákat (ábrán mutassa meg a jelentésüket)!

b) Írja fel a gömbi koordináták és a Descartes koordináták közötti kapcsolatot! Számolja ki a gömbi koordinátákhoz tartozó Jacobi determinánst!

c) * Határozza meg gömbi koordináták segítségével a gömb térfogatát!

a.)



(2)

b.)
$$\begin{rcases} \varrho = r\sin\vartheta \\ x = \varrho\cos\varphi = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{rcases} (2)$$

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \quad (1)\ (1)\ (1)$$

$$= \cos\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}}_{r\cos\vartheta\cdot r\sin\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}}_{=1}} + r\sin\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}}_{\sin^2\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}}_{=1}} = \quad (1)$$

$$= r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\sin\vartheta \overset{(1)}{=} r^2\sin\vartheta(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta) = r^2\sin\vartheta \quad (1)$$

c.)
$$0 \le r \le R \qquad V_{gömb} = \iiint\limits_V 1\,dV \quad (1)$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le \vartheta \le \pi$$

$$V_{gömb} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{\left(-\cos\vartheta\right)\Big|_{\vartheta=0}^{\pi}}_{(-\cos\pi+1)=2} d\varphi\, dr = \quad (1)$$
(1) (1) (1) (1)

$$= 2\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi\, dr = 2(2\pi-0)\int_0^R r^2\,dr = 4\pi\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}R^3\pi$$
(1) (1)

v1 030612/4.

zD **6. feladat (18 pont)***

a) Igazolja, hogy

$$f(z) = (z-j)\,\overline{(z-j)}$$

nem reguláris!

b)

$$\oint_{|z-j|=3} (z-j)\,\overline{(z-j)}\ \mathrm{d}z = ?$$

a.) $f(z) = |z-j|^2 = |x+j(y-1)|^2 = x^2+(y-1)^2 = u+jv$

$u(x,y) = x^2+(y-1)^2$ (1) $v(x,y)=0$ (1)

u, v tot. deriválható mindenütt, mert a parciálisok léteznek és folytonosak. (1)

C-R : $\begin{cases} u_x' = v_y', \\ u_y' = -v_x' \end{cases}$ (2)

$u_x' = 2x = v_y' = 0$ (1) $2x=0 \Rightarrow x=0$

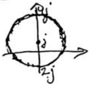
$u_y' = 2(y-1) = -v_x' = 0$ (1) $2(y-1)=0 \Rightarrow y=1$ } (1)

$\Rightarrow$ $z=j$-ben f deriválható (1) és sehol nem reg. (1)

b.) $z(t) = 3\cos t + j(1+3\sin t) =$

$= j + 3e^{jt}$ (1)

$z'(t) = 3je^{jt}$ (1)



$\int f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\,z'(t)\,dt$ (1) felhasználásával:

$$\int_{|z-j|=3} f(z)\,dz \overset{(1)}{=} \int_0^{2\pi} \underset{(2)}{3^2} \cdot 3je^{jt}\,dt = 27j\,\frac{e^{jt}}{j}\Big|_{t=0}^{2\pi} \overset{(1)}{=}$$

$$= 27\big(\underbrace{e^{j2\pi}}_{1} - \underbrace{e^{0}}_{1}\big) = 0 \quad (1)$$

v1 030612/5.

$z\sum$ **7. feladat (13 pont)***

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh}(2z^2) - 2z^2}{z^{11}}, \qquad z_0 = 0$$

a) Határozza meg az f függvény z_0 körüli Laurent sorát! Adja meg a konvergencia gyűrűt!
b) Határozza meg az f függvény z_0-beli residuumát!

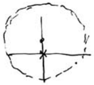
c) $\oint\limits_{|z-4j|=20} f(z)\mathrm{d}z = ?$ d) $\oint\limits_{|z-4j|=3} f(z)\mathrm{d}z = ?$

a) $\operatorname{sh} u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots$ 1 $u \in \mathbb{C}$ 1

$\operatorname{sh} 2z^2 = 2z^2 + \frac{2^3 z^6}{3!} + \frac{2^5 z^{10}}{5!} + \frac{2^7 z^{14}}{7!} + \dots$ 1

$f(z) = \frac{2^3}{3!\,z^5} + \frac{2^5}{5!\,z} + \frac{2^7 \cdot z^3}{7!} + \dots$ 2 ; $0 < |z|$ 1

b.) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = c_{-1} = \frac{2^5}{5!}$ 1 1

c.) 

$\oint\limits_{|z-4j|=20} f(z)\,dz = 2\pi j \operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = 2\pi j \frac{2^5}{5!}$ 1 1

f reg T-n 1 $\Rightarrow \oint\limits_{|z-4j|=3} f(z)\,dz = 0$ 1

Pótfeladat. Csak az elégséges, esetleg a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

nD 8. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{x^2+y}{y}\right)$$

a) Differenciálható-e az f függvény a $P(0,1)$ pontban?
Írja fel $\operatorname{grad} f$ értékét a P pontban!

b) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_P = ?$, ha $\underline{e}$ párhuzamos $(2,-3)$ -mal.

$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{x^2}{y}+1\right)$$

$$f'_x = 1 + \frac{1}{\frac{x^2+y}{y}} \cdot \frac{2x}{y} \quad (1)$$

$$f'_y = \frac{y}{x^2+y} \cdot \frac{-x^2}{y^2} \quad (1)$$

$P(0,1)$ egy környezetében léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P)\ \exists$ (2)

$$\operatorname{grad} f(P) = \underbrace{f'_x(P)}_{=1\ (1)}\,\underline{i} + \underbrace{f'_y(P)}_{=0\ (1)}\,\underline{j} = \underline{i} \quad (1)$$

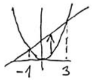
b.) $\underline{v} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow \underline{e} = \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}$ (1)

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \operatorname{grad} f(P) \cdot \underset{(1)}{\underline{e}} = (\underline{i}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{j}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad (1)$$

$n\int$ 9. feladat (10 pont)

$$\iint_T (x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?\,, \qquad T:\ y \geq 2x^2, \quad y \leq 4x+6$$

$2x^2 = 4x+6$ (1)



$$\int_{-1}^{3} \int_{2x^2}^{4x+6} (x+1)\, \underbrace{dy\, dx}_{(1)} =$$

(1) (1)

$$= \int_{-1}^{3} (x+1)\, y \Big|_{y=2x^2}^{4x+6} dx \ (1) = \int_{-1}^{3} (x+1)\,(4x+6-2x^2)\, dx \ (2) =$$

$$= \int_{-1}^{3} (-2x^3 + 2x^2 + 10x + 6)\, dx \ (1) = -2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2} + 6x \Big|_{-1}^{3} \ (1) =$$

$$= -\frac{3^4}{2} + 2\frac{3^3}{3} + 5\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 5 - 6\right) \ (1)$$

v1 030612/7.