

1. feladat (4+9=13 pont)

a) Mondja ki a rendőrelvet! (Bizonyítás nélkül!)

b) Számolja ki az $a_n = \left(\frac{3n-5}{3n+6}\right)^{2n^2}$ sorozat határértékét!Mo. a) Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow A$ és $n \geq N$ esetén $b_n \geq c_n \geq a_n$, akkor $c_n \rightarrow A$ (4p)b) $\frac{\left(1 - \frac{5}{3n}\right)^n}{\left(1 + \frac{6}{3n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{e^2} = e^{-\frac{11}{3}}$ (2+2+1p), és elég nagy n esetén $0 \leq a_n \leq \left(e^{-\frac{11}{3}}\right)^{2n} \rightarrow 0$ (1+2p) így a rendőrelv alapján $a_n \rightarrow 0$ (1p).**2. feladat (4+11=15 pont)**a) Rakja sorrendbe az a^n , n^k , n^n , $n!$ nagyságrendeket! (Itt $a > 1$ és $k > 0$ valós állandó, n pedig a sorozatok indexe.)

b) Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz superiorját és limesz inferiorját! Konvergensek a sorozatok?

$$a_n = \frac{n^2 + n(-7)^n}{n! + 2^n} \qquad b_n = \frac{n! + 2^n}{n^2 + n(-7)^n}$$

Mo. a) $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$ (4p)b) $a_n = \frac{n7^n}{n!} \cdot \frac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1 + \frac{2^n}{n!}} = 7 \cdot \frac{7^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1 + \frac{2^n}{n!}}$ (2p). Páros n esetén $\frac{\frac{n}{7^n} + (-1)^n}{1 + \frac{2^n}{n!}}$ határértéke 1, páratlan n esetén pedig -1 (2p) és $\frac{7^{n-1}}{(n-1)!} \rightarrow 0$ (1p), tehát a sorozat konvergens, egyetlen torlódási pontja van: $0 = \lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$ (2p). $b_n = \frac{1}{a_n}$ (1p), és $a_n \geq 0$, ha n páros, tehát $b_{2n} \rightarrow \infty$ (1p), és $a_n \leq 0$, ha n páratlan, így $b_{2n+1} \rightarrow -\infty$ (1p). A torlódási pontok halmaza $\{-\infty, \infty\}$, $\liminf b_n = -\infty$, $\limsup b_n = \infty$, és a sorozat divergens (1p).**3. feladat (8+9=17 pont)**

a) Mondja ki és bizonyítsa be a reciprokfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt!

b) Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \frac{\ln(2x+4)}{x+2}$ függvény monoton! Milyen lokális szélsőérték helyei vannak a függvénynek?Mo. a) $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ (2p) (Ahol f deriválható, és értéke nem 0.) (1p)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \quad (2p)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x)f(x+h)} = \quad (2p)$$

$$= \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

A határérték számításánál felhasználtuk, hogy ha f deriválható egy pontban, akkor ott folytonos is. **(1p)**

$$b) D_f = (-2, \infty) \quad (1p), \quad f'(x) = \frac{\frac{2(x+2)}{2x+4} - \ln(2x+4)}{(x+2)^2} = \frac{1 - \ln(2x+4)}{(x+2)^2} = 0 \quad (3p)$$

, ha $x = \frac{e-4}{2}$ **(2p)**, így a függvény monoton növekvő a $(-2, \frac{e-4}{2})$ intervallumon, és monoton csökkenő a $(\frac{e-4}{2}, \infty)$ intervallumon. **(2p)**. Az $x = \frac{e-4}{2}$ pontban lokális maximum van **(1p)**.

4. feladat (4+11=15 pont)

a) Mondja ki a l'Hospital szabályt! (Bizonyítás nélkül.)

b) Osztályozza az $f(x) = \frac{|x-2| \arctg x}{x^3 + x^2 - 6x}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. a) Legyen f, g differenciálható x_0 egy pontozott környezetében, itt $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$. **(4p)**

b) Szakadási helyek a nevező zérushelyei: 0, 2, -3 **(2p)**.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{|0-2|}{0^2 + 0 - 6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{3}$ **(2p)**, tehát itt a függvénynek megszüntethető szakadása van **(1p)**.

$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \frac{\arctg 2}{2^2 + 3 \cdot 2} \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{|x-2|}{x-2} = \pm \frac{\arctg 2}{10}$ **(2p)**, tehát itt a függvénynek véges ugrása van **(1p)**.

$\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f(x) = \frac{\arctg(-3)}{(-3)^2 - 2 \cdot (-3)} \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{1}{x+3} = \mp \infty$ **(2p)**, tehát itt a függvénynek lényeges szakadása van **(1p)**.

5. feladat (10 pont)*

Határozza meg az $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. $\int f(x) dx = \int 2x^{-3} - x^{-5/2} - \frac{3}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^{-3/2} - \frac{3}{2} \arcsin(2x) + c$
(az átalakításokért **(4p)**, utána minden integrálért **(2p)**)

6. feladat (4+11=15 pont)*

a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozott integrálra! (Bizonyítás nélkül.)

b) Megfelelő helyettesítéssel adja meg az $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ integrált!

Mo. a) $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$ (4p)

b) A $t = \sqrt{x}$ helyettesítést alkalmazva $x = t^2 = \varphi(t)$, és $\varphi'(t) = 2t$ (3p)

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \int_0^2 \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int_0^2 1 - \frac{1}{t^2+1} dt = (3+2p)$$

$$= [2t - 2 \arctg t]_0^2 = 4 - 2 \arctg 2 \quad (2+1p)$$

7. feladat (4+11=15 pont)*

a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét! (Bizonyítás nélkül.)

b) Számolja ki a $\int_0^\infty x e^{-x} dx$ integrált!

Mo. a) $\int f'g = fg - \int fg'$ (4p)

b) $\int x e^{-x} dx \stackrel{(3p)}{=} -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx \stackrel{(3p)}{=} -(1+x)e^{-x}$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx \stackrel{(1p)}{=} - \lim_{\omega \rightarrow \infty} [(1+x)e^{-x}]_0^\omega \stackrel{(1p)}{=} - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1+\omega}{e^\omega} + 1 \stackrel{(2p)}{=} - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{e^\omega} + 1 \stackrel{(1p)}{=} 1$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})?$$

Mo. Mindkét függvény értelmezési tartománya $[1, \infty)$ (3p).

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (1p),$$

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (5p),$$

és $\operatorname{arch} 1 = 0 = \ln(1 + \sqrt{1^2 - 1})$ (3p), tehát a két függvény minden $x \in [1, \infty)$ esetén megegyezik (2p).