A 2. Vizsga megoldásai (2014. június 5.)

(1) $f(x)=\frac{1}{1+2x}=\frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ $\boxed{2 \text{ pont}}$

$\Updownarrow$

$|-2x|<1$, azaz $|x|<\frac{1}{2}$: $KT=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{2 \text{ pont}}$

$g(x)=\frac{1}{(1+2x)^2}=-\frac{1}{2}f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n\right)'=$

$\boxed{2 \text{ pont}}$

$\uparrow$ $|x|<\frac{1}{2}$ esetén egyenletes is a konvergencia (hatványsor)

$=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n n x^{n-1}\right)=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{n-1} n x^{n-1}$ $\boxed{3 \text{ pont}}$ $KT=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{1 \text{ pont}}$

---

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$

$f'_x(x,y)=3x^2-9y=3(x^2-3y)=0 \iff x^2=3y$

$f'_y(x,y)=3y^2-9x=3(y^2-3x)=0 \iff x=\frac{y^2}{3}$

$\uparrow$ szükséges felt.

$\rightsquigarrow \frac{y^4}{9}=3y$

$\frac{y}{9}(y^3-27)=0$

$y=0$ vagy $y=3$

$\Downarrow$ $x=0$, $\Downarrow$ $x=3$

lehetséges szélsőérték helyek:

$P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$ $\boxed{2 \text{ pont}}$

$f''_{xx}(x,y)=6x$ $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-9$ $f''_{yy}(x,y)=6y$

Hesse-mátrix

$H=\begin{pmatrix}6x & -9\\ -9 & 6y\end{pmatrix}$ $\det H=36xy-81$

$P_1(0,0)$-ban : $\det H=-81<0 \rightsquigarrow \nexists$ sz.é.

$P_2(3,3)$-ban $\det H=36\cdot 9-81>0 \rightsquigarrow \exists$ sz.é.

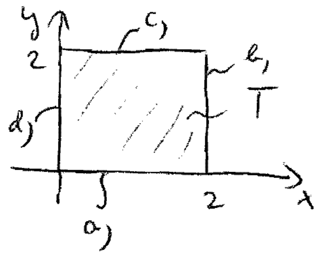
és $6x\big|_{P_2}=6\cdot 3=18>0 \Rightarrow$ P_2-ben lok. MIN

lok MIN. $f(3,3)=27+27-81+27=0$ $\boxed{4 \text{ pont}}$

② folytatás $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [0,2],\ y \in [0,2]\}$ korlátos és zárt

$f(x,y)$ folytonos T-n $\rightsquigarrow$ felveszi szélsőértékeit (Weierstrass)

$P_2(3,3) \notin T \implies$ csak a határokon vehet fel



a) $0 \le x \le 2$, $y = 0$

$f(x,0) = x^3 + 27 \rightsquigarrow$ min $f(0,0) = 27$

max $f(2,0) = 8 + 27 = 35$

$\boxed{1\ \text{pont}}$

b) $x = 2$, $0 \le y \le 2$

$f(2,y) = 8 + y^3 - 18y + 27 = y^3 - 18y + 35 \equiv g(y) \rightsquigarrow g'(y) = 3y^2 - 18 = 0$

$\hookrightarrow y = \pm\sqrt{6} \notin [0,2]$

határok:

$\hookrightarrow$ ~~min~~ $g(0) = f(2,0) = 35$

$g(2) = f(2,2) = 7$

$\boxed{1\ \text{pont}}$

c) $0 \le x \le 2$, $y = 2$

$f(x,2) = x^3 - 18x + 35$ hasonlóan b)-hez, a szélsőértékek: $f(0,2) = 35$

$f(2,2) = 7$

$\boxed{1\ \text{pont}}$

d) $x = 0$, $0 \le y \le 2$

$f(0,y) = y^3 + 27$ hasonlóan a)-hoz $f(0,0) = 27$

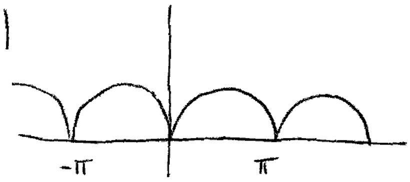
$f(0,2) = 35$

$\boxed{1\ \text{pont}}$

Összegzés abszolút minimum T-n $= 7$ $(2,2)$-ben

-ll- maximum T-n $= 35$ $(0,2)$-ben és $(2,0)$-ban

③ $f(x) = |\sin x|$



páros $\Rightarrow$ $\boxed{b_k = 0}$ ||1 pont|

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$ ||1 pont|

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\,dx =$$

parc. int: $u = \sin x \rightsquigarrow u' = \cos x$

$v' = \cos kx \rightsquigarrow v = \frac{\sin kx}{k}$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \underbrace{\left[\frac{\sin x \cdot \sin kx}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \cos x \frac{\sin kx}{k}\,dx \right\} =$$

parc. int

$u = \cos x \qquad u' = -\sin x$

$v' = \frac{\sin kx}{k} \qquad v = -\frac{\cos kx}{k^2}$

$$= -\frac{2}{\pi}\left\{ \underbrace{\left[-\frac{\cos x \cdot \cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi}}_{\frac{1}{k^2}(\cos k\pi + 1)} - \int_0^{\pi} \sin x \cos \frac{kx}{k^2}\,dx \right\}$$

vagyis $\quad a_k = -\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi + 1) + \frac{1}{k^2} a_k \rightsquigarrow a_k \underbrace{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}_{\frac{k^2-1}{k^2}} = -\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi + 1)$

$$a_k = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}(\cos k\pi + 1) = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}\left((-1)^k + 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ptlan} \\ -\frac{4}{\pi(k^2-1)}, & \text{ha } k \text{ ps} \end{cases}$$ ||4 pont|

$f(x)$ Fourier-sora:

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)}$$ ||2 pont|

mivel $f(x)$ mindenhol folytonos, így $\Phi(x)$ mindenütt előállítja f-et (Dirichlet-tétel) ||2 pont|

(4)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{r\to0}\frac{r^3(\cos^3\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi)}{r^2}=\lim_{r\to0}r\underbrace{(\cos^3\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi)}_{\text{korlátos}}=0$$

$$\hookrightarrow\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)\qquad\boxed{2\text{ pont}}$$

f folytonos az origóban

b) ha $(x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)\cdot2x}{(x^2+y^2)^2}\qquad\boxed{1\text{ pont}}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-2xy(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)\cdot2y}{(x^2+y^2)^2}\qquad\boxed{1\text{ pont}}$$

$(x,y)=(0,0)$-ban

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=1\qquad\boxed{1\text{ pont}}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0\qquad\boxed{1\text{ pont}}$$

c) Ha f deriválható az origóban, akkor ott $\operatorname{grad}f(0,0)=(1,0)$ lenne, ahol:

$$f(x,y)=f(0,0)+f'_x(0,0)\cdot x+f'_y(0,0)\cdot y+\varepsilon(x,y)\quad\text{, vagyis}$$

$$\varepsilon(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}-x=\frac{x^3-xy^2-x^3-xy^2}{x^2+y^2}=-\frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{r\to0}\frac{-2r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^3}=$$

$$=-2\cos\varphi\sin^2\varphi$$

függ φ-től

f nem deriválható $(0,0)$-ban $\Longleftarrow\ \nexists\ \Leftarrow$ $\boxed{4\text{ pont}}$

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det A = -2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ invertálható!}$$

$\boxed{1 \text{ pont}}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Ax = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2 \text{ pont}}$

vagyis $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektor $\lambda = 1$ sajátértékkel

mivel $\det A^{100} = (\det A)^{100} = 2^{100} \neq 0 \rightsquigarrow A^{100} \rightsquigarrow$ invertálható

$\boxed{1 \text{ pont}}$

A sajátértékei

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}$$

$\boxed{2 \text{ pont}}$

- $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó sajátvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2$ esetén $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -2\beta \end{pmatrix} \text{ -ból} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \text{ pl} \end{array}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektor

$(A^{100})^{-1}$ sajátértékei: $\dfrac{1}{(-2)^{100}} = \dfrac{1}{2^{100}}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektorral

és $\dfrac{1}{1^{100}} = 1$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektorral

$\boxed{4 \text{ pont}}$