1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Metszik–e az alábbi egyenesek egymást, és ha igen hol?
$e_1\ : x = 1+t\,,\ y = -1+2t\,,\ z = 2-t\,;\quad e_2\ : x = 2+t\,,\ y = 3+t\,,\ z = 1-t$

MO. $x_1 = x_2\,, y_1 = y_2 \rightsquigarrow 1+t = 2+s\,, -1+2t = 3+s \rightsquigarrow t = 1+s\,, s = -4+2t \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow t = -3+2t \rightsquigarrow t = 3\,, s = 2 \rightsquigarrow P = (4,5,-1) \in e_1 \cap e_2$

---

2. Igazak–e a következő állítások?
a. Ha (a_n) és (b_n) divergens, akkor (a_nb_n) is divergens
b. Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_nb_n) divergens
c. Ha (a_n) divergens és (a_nb_n) konvergens, akkor (b_n) konvergens
d. Ha (a_n) konvergens és (a_nb_n) konvergens, akkor (b_n) konvergens

MO. a. Nem: $a_n = b_n = (-1)^n$; **b.** Nem: $a_n = \frac{1}{n}\,, b_n = (-1)^n$; **c.** Nem: lásd **a.**;
d. Nem: lásd **b.**

---

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = ?$

MO. $\displaystyle\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

---

4. Az alábbi intervallumok közül melyeken egyenletesen folytonos az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény?
$I_1 = (0,1)\,,\ I_2 = [0,1]\,,\ I_3 = [1,\infty)$

MO. Mindhármon: a) Heine–tétellel mert $f \in C(I_2)$ és I_2 zárt korlátos intervallum,
b) $I_1 \subseteq I_2$, c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightsquigarrow |f'(x)| \le \frac{1}{2}$ ha $x \in I_3 \rightsquigarrow f'$ korlátos I_3–on.

---

5. Legyen $f(x) = x^{(e^x)}$ minden $x > 0$–ra. $f'(x) = ?$
MO.
$f(x) = e^{\ln f(x)} \rightsquigarrow \ln f(x) = e^x \ln x \rightsquigarrow f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = f(x)(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}) = f(x)e^x(\ln x + \frac{1}{x})$

---

6. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\, dx = ?$

MO. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$