Flegy

(1) $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik hallgató vizsgája sikeres} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$\boxed{n = 100}$

Így $S_n := X_1 + \dots + X_n$ a sikeres vizsgázók száma.

A kérdés: $\mathbb{P}(S_n \geq 67)$ becslése (nagy eltérés)

S_n független, de nem azonos eloszlású val. változók összege,

így a $\boxed{\text{Cramér tétel nem használható}}$ csak a Hoeffding-egyenlőtlenség:

$X_i \sim B(p_i)$, ahol p_i a siker-valószínűség: $p_i = 0.9$, 40 db i-re

$p_i = 0.2$, 60 db i-re

Ezzel $\mathbb{E}S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 40 \cdot 0.9 + 60 \cdot 0.2 = 36 + 12 = 48$,

vagyis $t = 67 - 48 = 19$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \geq 67) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\} =$$

[ahol $a_i = 0$, $b_i = 1$ választással teljesül, hogy $a_i \leq X_i \leq b_i$.]

$$= \exp\left\{-\frac{2 \cdot 19^2}{100 \cdot (1-0)^2}\right\} = e^{-7.22} \approx 7.34 \cdot 10^{-4}$$

~~(2) Z_1 = az első~~

(2) Nevezzük 0. generációnak a legelső igényt

1. — // — az ő kiszolgálása alatt érkezőket

2. — // — 1. generáció kiszolgálása alatt érkezőket

$(k+1)$. — // — k. — // —

Jelölje Z_n az n-edik generáció elemszámát, $n = 0, 1, 2, \dots$

Z_n $\boxed{\text{Galton-Watson elágazó folyamat}}$ $\boxed{m = \mathbb{E}(\text{egylépéses utódszám}) = \mathbb{E}(Poi(1)) = 1}$

vagyis $\boxed{\text{a folyamat kritikus}}$ (és nem elfajult) $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1}$

Vill ③

$\{1, 2, 3, 4\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 3.

$\{5, 6\}$ zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1.

Vill ④

a.) $t = 0.02$ rövid idő: $\lambda \leq 3$ nagyságrendű rátákkal

nagy val. séggel egyetlen ugrás sem történik

$$\Rightarrow P(X(t)=2 \mid X(0)=3) \approx t \cdot \lambda_{32} = t \cdot 1 = 0.02 = 2\%$$

b.) $t = 200$ hosszú idő: $\lambda \geq 1$ nagyságrendű rátákkal nagy val. séggel sok ugrás történik

A MC
- folytonos idejű
- véges állapoterű
- irreducibilis

$$\left.\right\} \xrightarrow[\text{alaptétele}]{\text{M.L.}} P\left(X(t)=2 \,\middle|\, \begin{array}{c}\text{bármi}\\ \text{kezdő}\\ \text{feltétel}\end{array}\right) \approx \pi_2$$

Esetünkben a stac. eloszlás: $G^T \pi^T = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$ megoldása lenormálva $\pi = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{P(X(t)=2 \mid X(0)=3) \approx \pi_2 = \frac{1}{3}}$$

$\boxed{\text{Info } 3 = \text{Vill } 5}$

Jelöljük p-vel a 6-es val-ségét, így p paraméterű geometriai eloszlásból vettünk $n=10$ elemű mintát:

$$\mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x=1,2,3\ldots$$

A likelihood-függvény

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=x_i) = \prod_{i=1}^{n}\left[p(1-p)^{x_i-1}\right],$$

a log-likelihood-függvény

$$\ell(p) = \ln L(p) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln p + (x_i-1)\ln(1-p)\right] = n\ln p + \ln(1-p)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right]$$

Ennek maximum-helyét keressük:

$$0 := \ell'(p) = n\cdot\frac{1}{p} + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right]\frac{1}{1-p}(-1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} = \frac{n}{p} \qquad /\cdot p(1-p)$$

$$p\sum_{i=1}^{n} x_i - \cancel{np} = n - \cancel{np}$$

$$\boxed{p_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}}$$

Esetünkben $n=10$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 28$ $\Rightarrow$ $\boxed{p_{ML} = \frac{10}{28} \approx 0.36}$

PTSZ Mat vizsga javítókulcs 2014.06.12 —4— Nagy

$\boxed{\text{Info } 4}$ Kétmintás egyoldali u-próbát végzünk,

$n_1 = 10, \quad n_2 = 8, \quad \varepsilon = 0.05, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1} = \frac{242.3}{10} = 24.23$

(a negyzetösszegekre nincs szükség) $\quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2} = \frac{213.1}{8} = 26.6375$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 3$

$\boxed{\text{A null-hipotézis } m_1 > m_2}$, ami ~~es~~ $\bar{y} > \bar{x}$ esetén bukhat meg.

Esetünkben ~~számolni kell~~, $\bar{y} > \bar{x} \Rightarrow$ számolni kell,

$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\ldots}$ -re ~~az kritikus~~ elutasítés feltétele $u < -K_\varepsilon$ lesz

ahol $K_\varepsilon = \phi^{-1}(1-\varepsilon) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$

A teszt-statisztika

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{-2.4075}{\sqrt{\frac{9}{10} + \frac{9}{8}}} = -\frac{2.4075}{2.025} \approx -1.68$$

Döntés: $u < -K_\varepsilon \Rightarrow$ a hipotézist $\boxed{\text{elvetjük}}$.