

## Fizika 1i (keresztfélév) vizsgakérdések kidolgozása

Készítette: Hornich Gergely, 2013.12.31.

Kiegészítette: Mosonyi Máté (10., 32. feladatok), 2015.01.21.

(Talapa Viktor 2013.01.15.-i [feladatgyűjteménye](#) alapján)

*Az alábbi kidolgozás hallgatói munka eredménye (előfordulhatnak hibák). Észrevételeket szívesen várok a [hornich.geri\[kukac\]gmail.com](mailto:hornich.geri[kukac]gmail.com) címre. Sok sikert!*

1. Egy 10 m/s sebességgel emelkedő léggömb kosarából kiejtenek egy homokzsákot, amikor a léggömb 100 m magasan van. Mennyi idő múlva ér földet a homokzsák?

- a. 4,5 s                      **b. 5,6 s**                      c. 6,7 s                      d. 7,8s                      e. Egyik sem

Legyen a pozitív irány a föld felé. Ekkor a zsák kezdősebessége  $v_0 = -10$  m/s, gyorsulása  $a = g = 10$  m/s. Négyzetes úttörvény alapján:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \Rightarrow t^2 - 2t - 20 = 0 \Rightarrow t_{1,2} \approx (-3.6, 5.6)$$

Negatív időnek itt nincs értelme, ezért a megoldás 5.6 s.

2. Egy ember a folyón felfele evez. Egy hídnál elhagyja a csáklóját, de csak fél óra múlva veszi észre. Ezután visszafordul és felszedi. Milyen gyors a folyó sodrása, ha 5 km-rel a híd után éri utol a csáklóját, és végig egyenletesen evezett?

- a. 2 km/h                      **b. 5 km/h**                      c. 10 km/h                      d. 8 km/h                      e. Egyik sem

Jelölje  $v_e$  az evezés,  $v_s$  a sodrás sebességét. Ekkor a felfelé tartó csónak  $v_e - v_s$ , lefelé  $v_e + v_s$  sebességgel halad. A visszafordulás pillanatában a csónak (boat)  $s_b = 1800(v_e - v_s)$  méterre, a csákány  $s_{cs} = 1800v_s$  méterre van a hídtól.

A találkozáshoz szükséges idő:

$$t_t = \frac{s_{cs} + s_b}{v_e} = \frac{1800v_s + 1800(v_e - v_s)}{v_e} = \frac{1800v_e}{v_e} = 1800 \text{ s} = \frac{1}{2} \text{ óra}$$

Tehát a csákány összesen  $1/2 + 1/2 = 1$  órán át sodródott a hídtól és 5 km-re jutott, tehát a folyó sodrása 5 km/h.

3. Egy részecske helyzetvektora  $r(t) = 3t^2\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ . Mekkora utat tesz meg az első 11 másodperc alatt?

- a. 255 m      b. 355 m      c. 555 m      **d. 605 m**      e. Egyik sem

A  $\mathbf{k}$  irányba nem történik elmozdulás, ezért számolhatjuk 2 dimenziós mozgásként:

$$s = |\vec{r}_{ij}(11)| - |\vec{r}_{ij}(0)| = |3 \cdot 11^2\mathbf{i} + 4 \cdot 11^2\mathbf{j}| - 0 = \sqrt{363^2 + 484^2} = 605 \text{ m}$$

4. Mekkora sebesség tartozik az  $r(t) = 3t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - 5t\mathbf{k}$  helyvektorú mozgáshoz a  $t = 2$  s időpillanatban?

- a. 18,5 m/s      **b. 37,2 m/s**      c. 66,8 m/s      d. 29 m/s      e. Egyik sem

Idő szerint deriváljuk az elmozdulásvektort, hogy sebességvektort kapjunk:

$$v(t) = \dot{r}(t) = 9t^2\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \Rightarrow |\vec{v}(t=2)| = \sqrt{(9 \cdot 2^2)^2 + (4 \cdot 2)^2 + (-5)^2} = 37,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Egy tömegpont egyenes vonalú mozgást végez az x tengely mentén. Mozgását az alábbi függvénnyel írhatjuk le:  $x(t) = -1 + 3t^2 - 2t^3$  [m]. Mekkora a tömegpont átlagsebessége a  $t = 0$  s indulástól az első megállásig tekintve?

- a. 9 m/s      **b. 1 m/s**      c. 3 m/s      d. 5 m/s      e. Egyik sem

Meg kell határozni, hogy mikor áll meg a tömegpont ( $v = 0$ ). Ehhez deriváljuk az elmozdulásfüggvényt, hogy sebességfüggvényt kapjunk:

$$v(t) = \dot{x}(t) = 6t - 6t^2$$

Zérushelyek a  $t = 0$  és  $t = 1$  időpontokban, tehát  $t = 1$  az első megállás:

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = -1 + 3 - 2 - (-1) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6. Az asztalon  $L$  hosszúságú hajlékony kötélfekszik. A végét kicsit meghúzáva, a kötélfúrlódás nélkül lecsúszik az asztról. Mennyi a sebessége, amikor a felső vége éppen elhagyja az asztralt?

- a.  $(2gL)^2$       b.  $\sqrt{2gL}$       c.  $(gL)^2$       **d.  $\sqrt{gL}$**       e. Egyik sem

Az asztralt éppen elhagyó kötelet tekinthetjük egy asztr lapja alatt  $L/2$  távolságra elhelyezett, kötélfel megegyező tömegű, pontszerű testnek. Ennek a kinetikus energiája  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ , az

asztalon elhelyezkedő kötél helyzeti energiája (ha a pontszerű test helyét vesszük zérushelynek)  $E_h = mgh = mg \frac{L}{2}$ . A lecsúszáskor a helyzeti energia kinetikussá alakul:

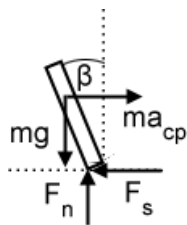
$$E_k = E_h \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg \frac{L}{2} \Rightarrow v = \sqrt{gL}$$

7. Egy kerékpáros 20m sugarú körpályán 10 m/s állandó nagyságú sebességgel halad. A függőlegeshez képest mekkora  $\beta$  szöggel kell dőlnie?

- a.  $\text{tg } \beta = 0,1$       b.  $\text{tg } \beta = 0,2$       **c.  $\text{tg } \beta = 0,5$**       d.  $\text{tg } \beta = 0,8$       e. Egyik sem

Forgatónyomaték alapján:

A kerékpárosra  $a_{cp} = v_t^2/r = 100/20 = 5 \text{ m/s}^2$  centripetális gyorsulás hat a körpálya középpontja felé (mely az ábrán balra lenne).



Az erők:  $F_n$  nyomó-,  $F_s$  súrlódási-,  $mg$  gravitációs-,  $ma_{cp}$  (virtuális) centrifugális erő, melyből az első kettő a kerék és a talaj találkozásánál hat, az utolsó kettő a biciklis tömegközéppontjára. Ahhoz, hogy egyensúlyban maradjon, a kerék-talaj pontra vonatkoztatott forgatónyomatéknak nullának kell lennie:

$$\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{D}| \cdot \sin\theta = 0 = mgd\sin\theta_1 - ma_{cp}d\sin\theta_2$$

Ahol  $D$  a kerék-talaj pontból a tömegközéppontba mutató vektor,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  pedig a  $mg$  és  $ma_{cp}$   $D$ -től mért szöge. ( $d$  pedig  $D$  vektor hossza).

Behelyettesítve:  $mgd\sin\beta = m \cdot 5 \cdot d\sin(90^\circ - \beta)$ , kiesik  $m$ ,  $d$ ;  $\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$ :

$$g\sin\beta = 5\cos\beta \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{5}{g} \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{1}{2}$$

Erők alapján:

Az  $mg$  és  $ma_{cp}$  erők eredője ( $F$ ) a kerék-talaj pontba kell mutatnia:

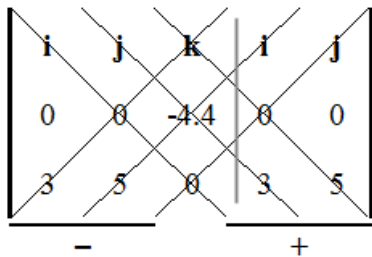
$$\cos\beta = \frac{mg}{F} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{a_{cp}m}{F} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = 5m \frac{\cos\beta}{mg} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\beta = \frac{5}{g} = \frac{1}{2}$$

8. Egy  $\omega = 11\mathbf{k}$  1/s szögsebességgel forgó korongon 0,2 kg tömegű test halad  $v = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$  m/s sebességgel. Mennyi a rá ható Coriolis-erő?

- a.  $12\mathbf{k}$  [N]    b.  $40\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$  [N]    c.  **$22\mathbf{i} - 13,2\mathbf{j}$**  [N]    d.  $14,8\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$  [N]    e. Egyik sem

$$F_{Cor} = -2m\omega \times v \Rightarrow -2m\omega = -2 \cdot 0,2 \cdot 11\mathbf{k} = -4,4\mathbf{k}$$

3D vektoriális szorzat (cross product,  $\times$ ) kiszámítására egy gyors módszer a Sarrus-szabály:



(A könnyebb szorzás érdekében az  $i, j$  vektorok kétszer vannak felvéve.) Az első három  $i, j, k$ -ből kiinduló, balra dőlő átlóbeli elemek szorzatát pozitív előjellel; az utolsó három  $k, i, j$ -ből kiinduló, jobbra dőlő átlóbeli elemek szorzatát negatív előjellel vesszük és ezt a 6 szorzatot előjelhelyesen összeadjuk (gyakorlatilag ez a mátrix determinánusa).

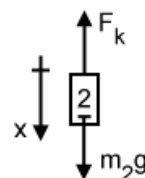
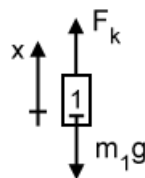
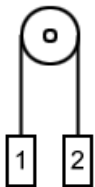
$$\begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 0 & 0 & -4,4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot 0 \cdot 0 + j \cdot (-4,4) \cdot 3 + k \cdot 0 \cdot 5 - k \cdot 0 \cdot 3 - i \cdot (-4,4) \cdot 5 - j \cdot 0 \cdot 0 = 22i - 13,2j$$

9. Egy csigán átvett fonál egyik végén 1kg, másik végén 2kg tömeg függ. Mennyi a fonálban ébredő erő a gyorsuló mozgás alatt?

- a. 10,3 N    b. **13,3 N**    c. 20,3 N    d. 30,3 N    e. Egyik sem

Felrajzolunk egy ábrát és a szabadtest-diagramokat (a koordináta-rendszer pozitív iránya mindig a mozgás irányába mutasson):



$\sum F = ma$  alapján:

$$F_k - m_1 g = m_1 a$$

$$-F_k + m_2 g = m_2 a$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$F_k - 10 = a$$

$$-F_k + 20 = 2a$$

Mivel a két test gyorsulása megegyezik, behelyettesítünk a 2. egyenletbe:

$$-F_k + 20 = 2(F_k - 10) \Rightarrow F_k = 40/3 = 13.\bar{3} \text{ N}$$

10. Függőleges síkban 1 m hosszú fonálon állandó 5 m/s sebességgel 1 kg tömegű testet forgatunk körbe. Mekkora a fonálerő maximuma?

- a. 15 N                      b. 25 N                      c. **35 N**                      d. 45 N                      e. Egyik sem

A fonalat feszítő erő két komponensből tevődik össze. Az egyik a centripetális gyorsulás és a test tömegének szorzata, a másik a gravitációs erő, mivel a test függőleges síkban mozog. A kettő összege akkor lesz a legnagyobb, amikor a test a pálya alsó pontján van. Ilyenkor a két erő iránya megegyezik.

Képlettel:  $K = m \left( \frac{v^2}{R} \right) + mg$

ahol m a test tömege, v a kerületi sebesség, R a fonál hossza (körpálya sugara).

Behelyettesítve:

$$K = 1 \left( \frac{5^2}{1} \right) + 1 \cdot 10 = 25 + 10 = 35 \text{ N}$$

11. Egy abroncs gördül végig egy lejtőn, miközben a tömegközéppontja 1 m-rel kerül mélyebbre. Mekkora a sebessége a lejtő alján?

- a. 3,16 m/s                      b. 3,65 m/s                      c. **4,47 m/s**                      d. 4,94 m/s                      e. Egyik sem

Kinetikus és helyzeti energia szempontjából vizsgáljuk a feladatot. A lejtő tetején a helyzeti energia maximális, a kinetikus zérus; míg a lejtő alján a helyzeti zérus és a kinetikus maximális. Tehát a kezdeti helyzeti energia átalakult kinetikus energiává (tegyük fel, hogy veszteség nélkül):

$$E_{h\uparrow} = mgh = m \cdot 10 \cdot 1 = 10m \quad = \quad E_{k\downarrow} = \frac{mv^2}{2}$$

$$10m = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{20} \approx 4.47 \frac{m}{s}$$

12. Függőleges falról a rá merőlegesen 10 m/s sebességgel érkező 1 kg tömegű labda 9 m/s sebességgel pattan vissza. A kölcsönhatás során átlagosan 95 N erőt fejtett ki. Mekkora volt a kölcsönhatás időtartama?

- a. 0,1 s                      b. **0,2 s**                      c. 0,5 s                      d. 0,8 s                      e. Egyik sem

A sebesség megváltozása:  $\Delta v = 10 - (-9) = 19 \text{ m/s}$ , mivel a sebességvektor irányt is vált.

$$\Sigma F = ma \Rightarrow 95 = 1 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 95 \cdot \Delta t = 19 \Rightarrow \Delta t = 0.2 \text{ s}$$

13. Egy  $m_1 = 3 \text{ kg}$  tömegű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik egy  $m_2 = 7 \text{ kg}$  tömegű testtel. Határozzuk meg, hány százaléka vész el együttes kinetikus energiájuknak az ütközés során, ha az  $m_2$  tömegű test az ütközés előtt nyugalomban volt?

- a. **70%**      b. 59,5%      c. 53,2%      d. 24,5%      e. Egyik sem

Kezdeti impulzus:  $I_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 3v_1 + 7 \cdot 0 = 3v_1$

Ütközés utáni impulzus:  $I_t = (m_1 + m_2)v_t = 10v_t$

Kezdeti energia:  $E_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{3}{2}v_1^2 + \frac{7}{2}0^2 = \frac{3}{2}v_1^2$

Ütközés utáni energia:  $E_t = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v_t^2 = 5v_t^2$

Felhasználva az impulzusmegmaradás törvényét:  $I_0 = I_t \Rightarrow 3v_1 = 10v_t \Rightarrow v_t = \frac{3}{10}v_1$

Energiák aránya:

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{5v_t^2}{\frac{3}{2}v_1^2} = \frac{5\left(\frac{3}{10}v_1\right)^2}{\frac{3}{2}v_1^2} = \frac{5 \cdot \frac{9}{100}v_1^2}{\frac{3}{2}v_1^2} = \frac{45}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$$

Az ütközés utáni energia 3/10-e az ütközés előttinek, tehát a veszteség 70%.

14. Egy  $v = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ m/s}$  sebességű test az  $F = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \text{ N}$  erő hatására mozog. Mekkora az erőhatás pillanatnyi teljesítménye?

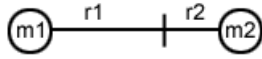
- a. 30 W      b. 26 W      c. **23 W**      d. 19 W      e. Egyik sem

$P = \overline{F} \cdot \overline{v}$  (mert Teljesítmény = Munka / Idő, Munka = Erő · Elmozdulás), tehát a két vektor skaláris szorzatát kell venni:

$$P = -3 \cdot 9 + 6 \cdot 6 + (-2) \cdot (-7) = -27 + 36 + 14 = 23 \text{ W}$$

15. Súlytalan, 110 cm hosszú, elhanyagolható tömegű merev rúd két végén 8 kg illetve 3 kg tömegű golyók vannak. A rendszer súlyponti tengely körül 5,28 J energiával forog. Mekkora a perdülete?

- a. 5,88 kgm<sup>2</sup>/s    b. 3,14 kgm<sup>2</sup>/s    c. 6,07 kgm<sup>2</sup>/s    **d. 5,28 kgm<sup>2</sup>/s**    e. Egyik sem



(Itt  $m_1 = 3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 8 \text{ kg}$ )

Vonatkozó képletek:

tehetetlenségi nyomaték:  $\theta = mr^2$ ; perdület:  $L = \theta\omega$ ; forgási energia:  $E_{rot} = \frac{1}{2}\theta\omega^2$

Meghatározzuk a súlypont helyét:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot 1.1 = \frac{8.8}{11} = 0.8 \text{ m} \Rightarrow r_2 = 0.3 \text{ m}$$

Teljes tehetetlenségi nyomaték a testek nyomatékainak összege:  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 3 \cdot 0.8^2 + 8 \cdot 0.3^2 = 2.64 \text{ kgm}^2$

Behelyettesítve az energia-képletbe megkapjuk a szögsebességet:

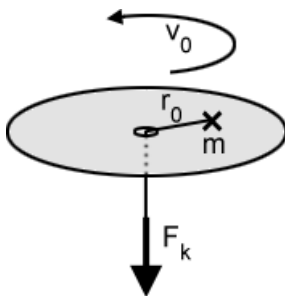
$$5.28 = 0.5 \cdot 2.64 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Ezekből a perdület:  $L = \theta\omega = 2.64 \cdot 2 = 5.28 \text{ kgm}^2/\text{s}$

16. Anyagi pontnak tekinthető 4 kg tömegű test vízszintes lemezen fekszik, a súrlódás elhanyagolható. A lemez közepén lyuk van, amelyen keresztül zsinetet vezetünk át és a testre erősítjük. A test kezdetben 0,5 m távolságra van a középponttól és ekkor 4 m/s sebességgel a tömegközéppont körüli mozgásra indítjuk. A zsineggel előbb körpályán tartjuk, majd befelé húzzuk a testet. A zsineg 600 N feszítőerőnél szakad el. Mekkora sugarú körön mozgott ekkor a test? (Tipp: Tekintsük a feladatot az impulzusmomentum illetve a perdület szemszögéből.)

- a. 2,4 cm    **b. 29,9 cm**    c. 12 cm    d. 41,2 cm    e. Egyik sem

A feladat megoldásához a perdületmegmaradás tételét használjuk fel.



Ábrán:  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ ,  $m = 4 \text{ kg}$ ,  $r_0 = 0.5 \text{ m}$ ,  $F_k = \text{kötélerő}$

Kiszámoljuk a kezdeti szögsebességet, tehetetlenségi nyomatékot és perdületet:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{v_0}{K_0} = 2\pi \frac{4}{2\pi r_0} = \frac{4}{0.5} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Theta_0 = mr_0^2 = 4 \cdot 0.5^2 = 1 \text{ kgm}^2$$

$$L_0 = \Theta_0 \omega_0 = 8 \cdot 1 = 8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Ismerve a szakadási kötélterőt (mely a centripetális erőnek felel meg), meghatározzuk a maximális centripetális gyorsulást:

$$F_{cp} = ma_{cp} \Rightarrow a_{cpsz} = \frac{600}{4} = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Ebből a tangenciális sebesség: } v_{sz} = \sqrt{r_{sz} a_{cpsz}} = \sqrt{150 r_{sz}}$$

Az  $r_{sz}$  sugár függvényében kifejezzük a szakadási perdületet:

$$L_{sz} = \Theta_{sz} \omega_{sz} = mr_{sz}^2 \cdot \frac{v_{sz}}{r_{sz}} = 4r_{sz} v_{sz} = 4r_{sz} \sqrt{150 r_{sz}}$$

Mivel a perdület megmarad:

$$L_0 = L_{sz} \Rightarrow 8 = 4r_{sz} \sqrt{150 r_{sz}} \Rightarrow r_{sz} = 0.299 \text{ m} = 29.9 \text{ cm}$$

17. Egy állandó vastagságú lemez síkjára merőleges két különböző tengelyére mérésekből ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát ( $\Theta_1 = 1 \text{ kgcm}^2$ ,  $\Theta_2 = 2 \text{ kgcm}^2$ ), valamint a tömegközépponttól mért távolságát ( $d_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 3 \text{ cm}$ ). Határozza meg a mérési eredmények birtokában, a lemez tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő és a lemez síkjára merőleges tengelyre!

- a.  $0,125 \text{ kgcm}^2$       b.  $0,55 \text{ kgcm}^2$       **c.  $0,875 \text{ kgcm}^2$**       d.  $1,2 \text{ kgcm}^2$       e. Egyik sem

Steiner-tétel értelmében ( $\Theta' = \Theta_{\text{tömegkp}} + mr^2$ ):

$$\Theta_1 = \Theta_k + md_1^2 \Rightarrow \Theta_k + m = 1$$

$$\Theta_2 = \Theta_k + md_2^2 \Rightarrow \Theta_k + 9m = 2$$

Megoldva az egyenletrendszer:  $\Theta = 7/8 = 0.875 \text{ kgcm}^2$



18. Egy gőzmozdony 20 m/s sebességgel közeledik a megfigyelőhöz. A mozdonyvezető a mozdony sípjának alaphangját 300 Hz rezgésszámúnak hallja. Mennyivel változik a síphang felharmonikusainak frekvenciája a nyugvó megfigyelő szerint, ha  $n \geq 1$  egész? ( $c = 330$  m/s)?

- a.  $n \cdot 9$  Hz      **b.  $n \cdot 19$  Hz**      c.  $n \cdot 29$  Hz      d.  $n \cdot 16$  Hz      e. Egyik sem

Doppler-effektus alapján a megfigyelő

$$f = \frac{c + v_{megf}}{c - v_{forr}} f_0 = \frac{330 + 0}{330 - 20} \cdot 300 \approx 319.4 \text{ Hz}$$

frekvenciát érzékel, ebből a felharmonikusok különbsége:  $n \cdot (319 - 300) = n \cdot 19 \text{ Hz}$

19. Az északi sarkon egyenesen megcélzott vízszintes irányú lövést adunk le egy 500 m-re lévő tárgyra, a lövedék sebessége 500 m/s. Milyen irányba és milyen eltéréssel csapódik be a lövedék a cél mellé, ha első közelítésben feltételezzük, hogy a lövedék rövid röpte alatt nem hagyja el a vízszintes síkot, és a rá ható eltérítő erő állandónak vehető?

- a. balra 0,036m      b. jobbra 0,056 m      **c. jobbra 0,036m**      d. jobbra 0,016 m      e. Egyik sem

A Föld Nyugatról Keletre forog, tehát az Északi-sarkon állva balra történő forgást tapasztalunk. A golyó alatt elfordul a Föld, ezért enyhén **jobbra** fog becsapódni.

$$\omega_{Föld} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx \frac{1}{13751} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

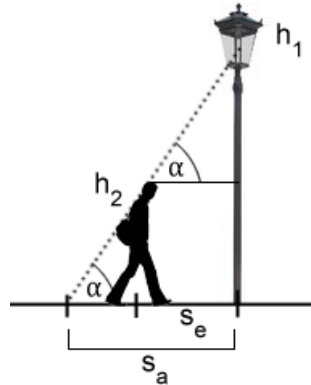
Ebből  $r = 500$  m-re a kerületi sebesség:

$$v_t = r\omega = 500 \cdot \frac{1}{13751} \approx 0.036 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mivel a golyó 1 s-ig repül:  $s = v_t t = 0.036 \cdot 1 = 0.036 \text{ m}$

20. Egy  $h_2$  magasságú ember állandó  $c$  sebességgel halad a föld felett  $h_1$  magasságban elhelyezett lámpa alatt. Mekkora  $v$  sebességgel mozog az ember árnyékának végpontja a földön?

- a.  $c$       b.  $c \cdot h_1/h_2$       **c.  $c \cdot h_1/(h_1-h_2)$**       d.  $c \cdot h_2/(h_1-h_2)$       e. Egyik sem



Felrajzolunk egy ábrát:

$tg\alpha = (h_1 - h_2)/s_e$  a felső, kisebbik háromszögből. A gyalogos  $t = s_e/c$  idő alatt ér a lámpához, ugyanennyi idő alatt kerül az árnyék végpontja a lámpa alá. Megadjuk  $s_a$  távolságot a többi adat függvényében:  $s_a = h_1/tg\alpha$ . Ezekből az árnyék sebessége:

$$v = \frac{s_a}{t} = \frac{\frac{h_1}{tg\alpha}}{\frac{s_e}{c}} = \frac{h_1}{tg\alpha} \cdot \frac{c}{s_e} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \cdot s_e \cdot \frac{c}{s_e} = c \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

21.  $V = 5$  l térfogatú és 200 kPa nyomású hélium gázt állandó nyomáson melegítünk mindaddig, amíg a térfogata 10 l nem lesz. Mennyivel változott a gáz belső energiája?

- a. 5000 J      b. 1000 J      **c. 1500 J**      d. 2000 J      e. Egyik sem

$$\Delta U = \frac{3}{2} p \Delta V = \frac{3}{2} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1500 \text{ J}$$

(A hőkapacitás  $3/2$ , mert egyatomos gázzal van szó)

22. 100 kPa nyomású és 200 m<sup>3</sup> térfogatú levegőt (2 atomos!) állandó térfogaton melegítünk, amíg 300 kPa lesz a nyomása. Mennyivel változott meg a gáz belső energiája?

- a.  $10^3$  J      b.  $10^2$  J      **c.  $10^8$  J**      d.  $10^6$  J      e. Egyik sem

$$\Delta U = \frac{5}{2} \Delta p V = \frac{5}{2} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 200 = 10^8 \text{ J}$$

(A hőkapacitás  $5/2$ , mert kétatomos gázzal van szó)

23. Mólnyi mennyiségű egyatomos gázzal mennyi hőt kell közölni állandó nyomáson, hogy belső energiája 900 J-lal növekedjék?

- a. **1500 J**      b. 694 J      c. 206 J      d. 144 J      e. Egyik sem

Belső energia változása egyatomos gáz és izobar folyamat esetén:  $\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V$ , munkavégzés:  $W = p\Delta V$ . A két egyenletből  $900 = \frac{3}{2}W \Rightarrow W = 600 J$ .

Termodinamika I. főtétele alapján:  $\Delta U = \delta Q - \delta W \Rightarrow \delta Q = 900 + 600 = 1500 J$

24. Egy Carnot-gép a 400 K és 300 K hőmérséklet között működik. Mekkora a hőerőgép által végzett munka, ha 600 J hőt vesz fel a magasabb hőmérsékletű hőtartályból?

- a. **150 J**      b. 120 J      c. 200 J      d. 260 J      e. Egyik sem

Hatásfok = Kinyert munka / Befektetett hő =  $1 - (T_{\text{hideg}} / T_{\text{meleg}})$

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_H}{T_M} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{300}{400} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{W}{600} = \frac{1}{4} \Rightarrow W = \frac{600}{4} = 150 J$$

25. Egy 20 l térfogatú edény hidrogén és hélium keveréket tartalmazza 20°C hőmérsékleten és 2 bar nyomáson, a gázkeverék tömege 5g. Hány gramm ebből a hidrogén? ( $M_H = 2 \text{ g/mol}$ ,  $M_{He} = 4 \text{ g/mol}$ ,  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )?

- a. 0,65 g      b. 2,43 g      c. **1,56 g**      d. 0,87 g      e. Egyik sem

SI-ben számolunk, kivéve a tömeget:  $20 \text{ L} = 0.02 \text{ m}^3$ ,  $20 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ ,  $2 \text{ bar} = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

Ideális gáztörvénnyel kiszámoljuk a teljes anyagmennyiséget:

$$pV = nRT \Rightarrow 2 \cdot 10^5 \cdot 0.02 = n \cdot 8.314 \cdot 293 \Rightarrow n = 1.642 \text{ mol}$$

Ebből a keverék moláris tömege:  $M = m/n = 5/1.642 = 3.045 \text{ g/mol}$ ,

ez kifejezhető így is (itt felhasználjuk az  $n = m/M$  képletet):

$$M = \frac{m_H + m_{He}}{n_H + n_{He}} = \frac{m_H + m_{He}}{\frac{m_H}{M_H} + \frac{m_{He}}{M_{He}}} = \frac{m_H + (m - m_H)}{\frac{m_H}{2} + \frac{m - m_H}{4}} = \frac{5}{\frac{m_H}{2} + \frac{5 - m_H}{4}}$$

tehát:

$$3.045 = \frac{5}{\frac{m_H}{2} + \frac{5 - m_H}{4}} \Rightarrow m_H \approx 1.56 \text{ g}$$

26. Hány mól 1 m<sup>3</sup> normál állapotú kripton-gáz?

- a. 15                      b. 23                      c. 36                      **d. 45**                      e. Egyik sem

Normál állapot: 0 °C (273 K), 100 kPa (régiesen: 101.325 kPa). Ideális gáztörvénnyel:

$$pV = nRT \Rightarrow 100 \cdot 10^3 \cdot 1 = n \cdot 8.314 \cdot 273 \Rightarrow n \approx 45 \text{ mol}$$

27. 100 literes edényben lévő ideális gáz tömegét 1kg-mal csökkentve a nyomás 1 MPa-lal csökken. Mekkora a gáz sűrűsége 10MPa nyomáson?

- a. 25 kg/m<sup>3</sup>              **b. 100 kg/m<sup>3</sup>**              c. 125 kg/m<sup>3</sup>              d. 85 kg/m<sup>3</sup>              e. Egyik sem

Ideális gáztörvényből (hőmérséklet és moláris tömeg állandó):

$$pV = nRT \Rightarrow \Delta pV = \frac{\Delta m}{M} RT \Rightarrow 10^6 \cdot 0.1 = \frac{1}{M} RT$$

Felírva 10 MPa-ra:

$$p_{max}V = \frac{m}{M} RT \Rightarrow 10^7 \cdot 0.1 = m \cdot \frac{1}{M} RT \Rightarrow m = \frac{10^6}{10^5} = 10 \text{ kg}$$

Ismerve a tömeget és térfogatot, a sűrűség:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{10}{0.1} = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

28. Egy 110 l térfogatú ballonban 0,8 kg hidrogén-gáz (M = 2 g/mol) és 1,6 kg oxigén-gáz (M = 32 g/mol) van, 20 °C hőmérsékleten. Mekkora a keverék nyomása?

- a. 50 kPa                      b. 500 kPa                      c. 1 MPa                      **d. 10 MPa**                      e. Egyik sem

Meghatározzuk a keverék mólszámát:  $n = n_O + n_H = m_O/M_O + m_H/M_H = 1.6/0.032 + 0.8/0.002 = 450 \text{ mol}$

Alkalmazva az ideális gáztörvényt (SI mértékegységekkel! Kelvin, kg, m<sup>3</sup>, stb.):

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} = \frac{450 \cdot 8.314 \cdot 293}{0.11} \approx 9.97 \approx 10 \text{ MPa}$$

29. Egy edényben mólnyi mennyiségű oxigéngáz ( $M = 32 \text{ g/mol}$ ) van, nyomása  $25 \text{ kPa}$ . Változatlan hőmérsékleten mennyi nitrogéngázt ( $M = 28 \text{ g/mol}$ ) kell az edénybe vinni, hogy a nyomás  $100 \text{ kPa}$  legyen?

- a.  $32 \text{ g}$       b.  $64 \text{ g}$       c.  **$84 \text{ g}$**       d.  $96 \text{ g}$       e. Egyik sem

Változatlan a hőmérséklet és a térfogat, tehát  $V/T$  állandó:

$$p_{ox}V = n_{ox}RT \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{R}{25 \cdot 10^3}$$

A nitrogén parciális nyomása  $100 - 25 = 75 \text{ kPa}$ ; ezekből mólszáma:

$$p_N V = n_N RT \Rightarrow n_N = \frac{p_N}{R} \cdot \frac{V}{T} = \frac{75 \cdot 10^3}{R} \cdot \frac{R}{25 \cdot 10^3} = \frac{75 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} = 3 \text{ mol},$$

tömege:

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow m_N = n_N M_N = 3 \cdot 28 = 84 \text{ g}$$

30. Mekkora a termodinamikai valószínűsége annak a 8 részecskéből álló rendszernek, amelynek makroeloszlása  $0\ 2\ 1\ 0\ 2\ 3$ ?

- a.  $0,6$       b.  $96$       c.  $580$       d.  **$1680$**       e. Egyik sem

?

31. Egy mólnyi ideális gáz izoterm módon  $104 \text{ Pa}$ -ról  $10 \text{ Pa}$ -ra terjed ki. Mennyi az entrópia megváltozása?

- a.  **$57 \text{ J/K}$**       b.  $255 \text{ J/K}$       c.  $6523 \text{ J/K}$       d.  $606 \text{ J/K}$       e. Egyik sem

?

32. 1 kg tömegű levegőt adiabatikusan térfogatának hatodrésztére komprimálunk, majd ezen a térfogaton a nyomását 1,5-szeresére növeljük. Határozza meg az entrópia változást a folyamat alatt! ( $M_{\text{levegő}} = 29 \text{ g/mol}$ )

- a. **290,6 J/K**    b. 293 J/K    c. 158 J/K    d. 327 J/K    e. Egyik sem

Két folyamatunk van, egy adiabatikus és egy izochor. Adiabatikusnál az entrópia változása 0, így most csak az izochor fog számítani:

$$S_2 - S_1 = m \cdot c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Felírjuk és rendezzük  $T_2/T_1$ -re az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

(V állandó ezért „kiesik”)

A levegő állandó térfogaton mért fajhője:

$$c_v = \frac{f \cdot R}{2 \cdot M}$$

Levegőnél általában 5 szabadsági fokkal szoktunk számolni, ezért  $f=5$ , az univerzális gázállandó  $R = 8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$  és  $M$  adott, értéke  $29 \text{ g/mol}$ , ami  $0,029 \text{ kg/mol}$ . Fontos SI-ben számolni!

$$c_v = \frac{5 \cdot 8,314}{2 \cdot 0,029} = 716,72 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ezután:

$$S_2 - S_1 = 1 \cdot 716,72 \cdot \ln(1,5) = 290,604 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

33. Mennyi adiabatikus munkavégzéssel lehet 1 kg oxigén gázt  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ -ról  $500 \text{ }^\circ\text{C}$ -ra melegíteni?

- a. **312 kJ**    b. 254 kJ    c. 203 kJ    d. 114 kJ    e. Egyik sem

Adiabatikus: nincs hőközlés a rendszer és környezete között ( $\Delta Q = 0$ ).

Ismerve az oxigén (2 atomos!) moláris tömegét ( $M_{\text{ox}} = 32 \text{ g/mol} = 0,032 \text{ kg/mol}$ ), kiszámítjuk a gáz mólszámát:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1}{0,032} = 31,25 \text{ mol}$$

Ebből a munkavégzés ( $5/2$  szorzó a kétatomos gáz miatt):

$$\Delta U = \Delta W = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2} \cdot 31.25 \cdot 8.314 \cdot 480 \approx 312 \text{ kJ}$$