ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jan. 17.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y^2+5)\,x}{(y^2-4)\,e^{2x^2}}\,, \qquad |y| \neq 2$$

(Elég az implicit alak.)

b) $$a_4\,y^{(4)} + a_3\,y''' + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását, ha $4x - 3e^{-3x}\sin 2x$ megoldja a differenciálegyenletet!

a.) $\boxed{10}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+5}{y^2-4}\,x\,e^{-2x^2}$$

$$\int \frac{y^2-4}{y^2+5}\,dy = \int x\,e^{-2x^2}\,dx \qquad 3$$

$$\int \underbrace{\frac{(y^2+5)-9}{y^2+5}}_{1-\frac{9}{5}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt5}\right)^2}}\,dy = -\frac{1}{4}\int \underbrace{-4x\,e^{-2x^2}}_{f'e^f}\,dx$$

$$y - \frac{9}{5}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{1}{4}\,e^{-2x^2} + C$$

4 2 1

b.) $\boxed{4}$

$$y = \underbrace{4x}\; - 3\underbrace{e^{-3x}\sin 2x}$$

Bázis: $e^{0\cdot x},\ x\,e^{0\cdot x},\ e^{-3x}\sin 2x,\ e^{-3x}\cos 2x$

Így a negyedrendű homogén de. általános megoldása:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x}\sin 2x + C_4 e^{-3x}\cos 2x$$
$$C_i \in \mathbb{R}$$

2. feladat (16 pont)

a) Mit nevezünk x_0 középpontú (bázispontú) hatványsornak? Milyen jellegű a hatványsor konvergencia tartománya? Hogyan kapható meg a leírására szolgáló jellemző? (2 tétel!)

b) Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(-1)^n}{2^{3n}}\;(x-4)^n$$

an2Ku110117/1.

a.) $\boxed{8}$ Hatványsor: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$; $a_k \in \mathbb{R}$ (2)

Konvergencia tartomány:

$|x-x_0|<R$-ben konv. $\quad x_0-R \quad x_0 \quad x_0+R$ (2)

$|x-x_0|>R$-ben div. a sor.

$|x-x_0|=R$: ?-es eset

(T1) $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ ill. (T2) $\alpha := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

1.) $R=\frac{1}{\alpha}$, ha $\alpha>0$ véges

2.) $R=\infty$, ha $\alpha=0$ (2+2)

3.) $R=0$, ha $\alpha=\infty$

b.) $\boxed{8}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^3} \to \frac{1}{8} = \frac{1}{R} \Rightarrow R=8$; $x_0=4$

$-4 \quad 4 \quad 12$

Végpontok:

$x=-4$: $\sum^{\infty} n \frac{(-1)^n}{8^n} (-8)^n = \sum^{\infty} \underbrace{n}_{\not\to 0}$: div.

$x=12$: $\sum^{\infty} n \frac{(-1)^n}{8^n} 8^n = \sum^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot n}_{\not\to 0}$: div

K.T: $(-4, 12)$

3. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \cos 3x^2$, $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $\quad x_0 = 2$

a.) $\boxed{5}$ $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots$; $R=\infty$

$f(x) = \cos 3x^2 = 1 - \frac{3^2x^4}{2!} + \frac{3^4x^8}{4!} - \frac{3^6x^{12}}{6!} + \ldots$ (3)

K.T: $(-\infty, \infty)$ (2)

b.) $\boxed{6}$ $\frac{a}{1-q} = a(1+q+q^2+\ldots) = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n$; $|q|<1$

$g(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{3}}$ $\quad q=-\frac{x-2}{3}$

$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(x-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-2)^n$ (4)

$|q| = \left|-\frac{x-2}{3}\right| = \frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2|<3$ $\quad -1 \quad 2 \quad 5$

K.T.: $(-1, 5)$ (2)

an2X110117/2.

4. feladat (14 pont)

a) A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát! Mi a sor konvergenciasugara?

b) Az előző sor felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg} 5x^2$$

függvény Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \; ; \qquad q := -x^2$$

$$\text{KT.:} \quad |q| = |-x^2| < 1 \longrightarrow |x| < 1\,, \quad R = 1$$

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} x)' \,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) \mathrm{d}t =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Tehát

Ⓣ $\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad |x| \le 1}$, így $R = 1$ 1

7

b.) $g(x) = \operatorname{arctg} 5x^2 = 5x^2 - \frac{5^3 x^6}{3} + \frac{5^5 x^{10}}{5} - \cdots$ 4

$|5x^2| = 5|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 2

5. feladat (16 pont)*

a) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértéke létezésére tanult elégséges tételt!

b)

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

Írja fel a függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját!

Van-e lokális szélsőértéke a $P_1(1, 2)$, illetve az $P_2(1, -2)$ pontokban az alábbi függvénynek?

Megoldás:

an2Xv110117/3.

a) T Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$\boxed{4}$

$$D(x,y) := \left|\underline{\underline{H}}(x,y)\right| \ \left(= \det\underline{\underline{H}}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f'_x(x_0,y_0)=0,\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$ és $D(x_0,y_0)>0$: *van* lok. szélsőérték:
$f''_{xx}(x_0,y_0)>0$: lok. min.
$f''_{xx}(x_0,y_0)<0$: lok. max.

$f'_x(x_0,y_0)=0,\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$ és $D(x_0,y_0)<0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték
$f'_x(x_0,y_0)=0,\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$ és $D(x_0,y_0)=0$: ? (További vizsgálat szükséges)

b)
$\boxed{12}$

$$f'_x = 2 - \frac{4}{yx^2} \qquad f'_y = 1 - \frac{4}{xy^2} \qquad 2$$

$$f''_{xx} = \frac{8}{yx^3} \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{4}{x^2y^2} \qquad f''_{yy} = \frac{8}{xy^3} \qquad 4$$

$f'_x(P_1)=0\ ,\ f'_y(P_1)=0 \Rightarrow$ itt lehet lok. szé.

$$D(P_1) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \text{van lok. szé.}$$

$f''_{xx}(P_1)>0 \Rightarrow$ lok. min. van P_1-ben 4

$f'_x(P_2) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ P_2-ben nincs lok. szé.
(nem teljesül a szüks. feltétel) 2

6. feladat (10 pont)*

Számítsa ki az

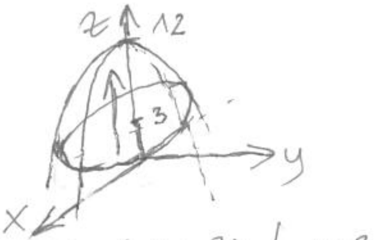
$$z = 12 - (x^2+y^2) \quad \text{és a} \quad z = 3$$

felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

Megoldás: hengerkoordinátás transzformációval:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ $\quad |J| = r$
$z = z$

$3 \le z \le 12 - r^2$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le r \le 3$



$$\iiint_V 1\,dV = \int_{r=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=3}^{12-r^2} r\,dz\,d\varphi\,dr = \quad 5$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi} r\cdot z\Big|_{z=3}^{12-r^2} d\varphi\,dr = \int_0^3\int_0^{2\pi}(9r - r^3)\,d\varphi\,dr = \quad 2$$

$$= (2\pi - 0)\int_0^3 (9r - r^3)\,dr = 2\pi\left(9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \quad 1$$

$$= 2\pi\left(\frac{3^4}{2} - \frac{3^4}{4}\right)\left(= \pi\cdot\frac{3^4}{2}\right) \quad 2$$

$z = 12-(x^2+y^2)$ és $z=3$
metszete: $3 = 12 - (x^2+y^2)$
$x^2+y^2 = 9$
Vetületpontok

an2Xv110117/4.

7. feladat (19 pont)*

a) Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |z|^2$ függvény?

b) Adja meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 2z}{z^2+9}\,\mathrm{d}z\,, \qquad I_2 = \oint_{|z+3j|=3} \frac{\operatorname{sh} 2z}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$$

Megoldás:

a.) $f(z) = x^2 + y^2 + j \cdot 0$

$\boxed{8}$ $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$ } tot. deriválhatók, mert minden parc. deriváltja $\exists$ és folytonos

C-R: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$:

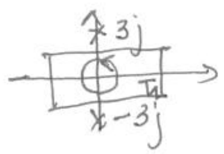
$u'_x = 2x$; $v'_y = 0$ $\qquad 2x = 0$, ha $x = 0$

$u'_y = 2y$; $v'_x = 0$ $\qquad 2y = 0$, ha $y = 0$

A két halmaz metszete : $z = 0$

Tehát a függvény $z=0$-ban deriválható és sehol sem reguláris.

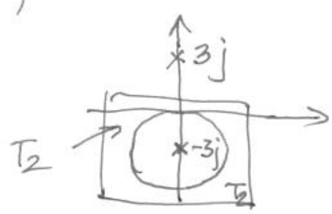
b.) $\boxed{11}$ $I_1 = \oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z^2+9}}_{\text{reg } T_1\text{-en } (2)} dz = 0$ (2)



(Cauchy-féle alaptétel miatt)

$$I_2 = \oint_{|z+3j|=3} \frac{\overbrace{\frac{\operatorname{sh} 2z}{z-3j}}^{\text{reg } T_2\text{-on } (2)}}{z+3j}\, dz =$$

$z_0 = -3j$



$$= 2\pi j \left.\frac{\operatorname{sh} 2z}{z-3j}\right|_{z=-3j} = 2\pi j \frac{\operatorname{sh}(-6j)}{-6j} = -\frac{\pi}{3} j \sin(-6) = j\frac{\pi}{3}\sin 6$$

(3)

$\operatorname{Re} I_2 = 0$, $\operatorname{Im} I_2 = \frac{\pi}{3} \sin 6$ (2)

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Keresse meg a z_1, z_2, z_3 és a z_4 komplex számok valós és képzetes részét:

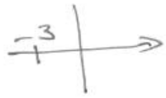
$$z_1 = e^{1-\frac{\pi}{4}j}, \qquad z_2 = \ln(-3), \qquad z_3 = \ln 0, \qquad z_4 = \ln(-3+3j)$$

amennyiben léteznek.

$z_1 = e^1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = e\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

(3) $\quad \operatorname{Re} z_1 = e\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \operatorname{Im} z_1 = -e\frac{1}{\sqrt{2}}$

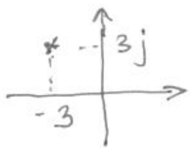
$z_2 = \ln(-3) = \ln|-3| + j\,\operatorname{arc}(-3) = \ln 3 + j(-\pi)$



(2) $\quad \operatorname{Re} z_2 = \ln 3\ ;\ \operatorname{Im} z_2 = -\pi$

(2) $\quad z_3 = \ln 0 \quad \nexists$

$z_4 = \ln(-3+3j) = \ln|-3+3j| + j\,\operatorname{arc}(-3+3j) =$



(3) $\quad = \ln\sqrt{18} + j\,\frac{3\pi}{4}$

$\operatorname{Re} z_4 = \ln\sqrt{18}\ ;\ \operatorname{Im} z_4 = \frac{3\pi}{4}$

9. feladat (10 pont)

Legyen

$$f(x,y) = \frac{e^{3x+2y^2}}{y^2+2}, \qquad P_0\,(0,1)$$

a) Határozza meg az f függvény gradiensét a P_0 pontban!

b) $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -4\,\underline{i} + 3\,\underline{j}$

a.) $\boxed{5}$ $\quad f(x,y) = e^{3x}\,\frac{e^{2y^2}}{y^2+2}$

$f_x' = 3e^{3x}\,\frac{e^{2y^2}}{y^2+2}\ ;\ f_y' = e^{3x}\,\frac{4ye^{2y^2}(y^2+2) - e^{2y^2}\cdot 2y}{(y^2+2)^2}$

$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = e^2\,\underline{i} + \frac{10}{9}e^2\,\underline{j}$

b.) $\boxed{5}$ $\quad \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e}$

$\underline{e} = -\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(e^2\underline{i} + \frac{10}{9}e^2\underline{j}\right)\left(-\frac{4}{5}\underline{i} + \frac{3}{5}\underline{j}\right) = -\frac{4}{5}e^2 + \frac{2}{3}e^2$

an2Xv 110117/6.