

1. feladat (27 pont)

Számolja ki az alábbi határértékeket

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) \operatorname{th} \frac{1}{x}, & \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3 + 3x)}{\sqrt[5]{x}}, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x} \right), & \quad d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

2. feladat (8 pont)

A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = 3.$$

3. feladat (13 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{|x^3 + 4x^2 + 4x|}{x^3 - 4x}$$

függvénynek?

4. feladat (11 pont)

Hol folytonos illetve differenciálható az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Írja fel a deriváltat, ahol létezik!

5. feladat (18 pont)

Igazolja, hogy az

$$f(x) = 3 - 4 \arcsin(e^{5x} - 2)$$

függvény invertálható a teljes értelmezési tartományon, és adja meg az inverzfüggvényt, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját.

6. feladat (12 pont)

a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = x^2 \ln x$$

függvény konvex illetve konkáv.

b) Van-e a függvénynek inflexiós pontja? Ha igen, írja fel a függvénygörbe érintőegyeneseinek egyenletét az inflexiós pontokban.

7. feladat (11 pont)

a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

függvény monoton növekvő illetve monoton csökkenő.

b) Felveszi-e a függvény a maximumát a $[0, 4]$ intervallumon? Ha igen, számolja ki a maximumot.

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvények deriváltjait:

$$f(x) = \cos(\ln(x^3 + x)), \quad g(x) = \frac{x \operatorname{sh} x}{e^x}.$$

9. feladat (10 pont)

Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{\sin(2x^2)}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$