ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2010. okt. 25
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (12 pont)

Írja le a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját és ennek alapján mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10\,n^2 - 3n - 14}{5n^2 - n + 3} = 2 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

D $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 3

$$|a_n - A| = \left|\frac{10n^2 - 3n - 14 - (2(5n^2 - n + 3)}{5n^2 - n + 3}\right| = \left|\frac{-n-20}{5n^2-n+3}\right| =$$ 4

$$= \frac{n+20}{5n^2-n+3} \le \frac{n+20n}{5n^2-n^2+0} = \frac{21}{4}\,\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow n > \frac{21}{4\varepsilon}$ 4 $\qquad N(\varepsilon) = \left[\frac{21}{4\varepsilon}\right]$ 1

2. feladat (16 pont)

Állapítsa meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2+2n} \cdot \frac{3^{n+2}}{10^n}} \qquad\qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{16n^2 + 7n}{2n^2 + 5}}$$

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \frac{3}{10} \sqrt[n]{9} = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \frac{3}{10} \sqrt[n]{9}$$ 3

$\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \to e^1$, $\sqrt[n]{9} \to 1$

$$\to e \cdot \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3e}{10}$$ 4 1

$$\sqrt[n]{\frac{16}{7}} = \sqrt[n]{\frac{16n^2}{2n^2+5n^2}} < b_n = \sqrt[n]{\frac{16n^2+7n}{2n^2+5}} < \sqrt[n]{\frac{16n^2+7n^2}{2n^2}} = \sqrt[n]{\frac{23}{2}}$$

$\sqrt[n]{\frac{16}{7}} \to 1$, $\sqrt[n]{\frac{23}{2}} \to 1$

$\Rightarrow b_n \to 1$ 8

an1zh1p101025/1.

3. feladat (14 pont)

$$a_{n+1} = \sqrt{8\,a_n - 7}\,, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \text{és} \quad a_1 = 4$$
$$(a_n) = (4\,,\ 5\,,\ 5.74\,, \cdots)$$

a) Bizonyítsa be, hogy $1 < a_n < 7$!
b) Igazolja, hogy a sorozat monoton!
c) Konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

a) T.I.

$\boxed{5}$ 1.) $1 < a_i < 7$ $\quad i = 1, 2, 3$ teljesül

2.) Tegyük fel, hogy $1 < a_n < 7$

3.) Igaz-e, hogy $1 < a_{n+1} < 7$?

Tehát $1 \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 7} \overset{?}{<} 7$

2.) miatt igaz, hogy:

$$1 < a_n < 7 \quad | \cdot 8$$
$$\Downarrow$$
$$8 < 8a_n < 56 \quad | -7$$
$$\Downarrow$$
$$0 < 1 < 8a_n - 7 < 49$$
$$\Downarrow$$

$\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1} < 7$, tehát igaz az állítás.

b.) Sejtés: (a_n) monoton nő

$\boxed{5}$ (B) T.I.

1.) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ teljesül

2.) Tfh. $a_{n-1} \leq a_n$

3.) Igaz-e, hogy $a_n = \sqrt{8a_{n-1} - 7} \overset{?}{\leq} \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1}$

2.) miatt

$$a_{n-1} \leq a_n \quad | \cdot 8$$
$$\Downarrow$$
$$8a_{n-1} \leq 8a_n \quad | -7$$
$$\Downarrow$$
$$0 < 1 \leq 8a_{n-1} - 7 \leq 8a_n - 7$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = \sqrt{8a_{n-1} - 7} \leq \sqrt{8a_n - 7} = a_{n+1}$$

Valóba (a_n) monoton csökken.

c.) (T) Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor konv (2)

$\boxed{4}$ Ha (a_n) konv., akkor A kielégíti a rekurzió összefüggést:

an1zh1p101025/2.

$A = \sqrt{8A-7} \Rightarrow A^2 - 8A + 7 = 0 \Rightarrow A = 1$ vagy $A = 7$.

Mivel $a_1 = 4$ és $a_n \nearrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 7$. (2)

4. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint a limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \frac{3^n + (-4)^n}{8 + 4^n}, \qquad b_n = \frac{(-2)^n + 3}{2^{3n} + 5^n}$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n}{8\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

n ps: $(-1)^n = 1$: $a_n \to \frac{0+1}{0+1} = 1$ (3)

n ptl : $(-1)^n = -1$: $a_n \to \frac{0-1}{0+1} = -1$ (3)

$\overline{\lim}\, a_n = 1$; $\underline{\lim}\, a_n = -1$; $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$ (3)

$$b_n = \frac{(-2)^n + 3}{8^n + 5^n} = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^n} \to \frac{0+0}{1+0} = 0 \quad (4)$$

$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (2)

5. feladat (13 pont)

Írja le a Leibniz kritériumot!

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2 - 2}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

(T) $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots \qquad c_n > 0$

Ha c_n monoton csökkenően tart 0-hoz, akkor a sor konvergens. (3)

$$c_n = \frac{n}{2n^2-2} = \frac{n}{n^2}\,\frac{1}{2-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{2-\frac{2}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{1}{2-0} = 0$$ (2)

an1zh1p101025/3.

c_n monoton csökkenő-e?

$$c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$$

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2-2} \overset{?}{\leq} \frac{n}{2n^2-2}$$

$$(n+1)\,(2n^2-2) \overset{?}{\leq} n\,(2n^2+4n)$$

$$2n^3-2n+2n^2-2 \overset{?}{\leq} 2n^3+4n^2$$

$$0 \overset{?}{\leq} 2n^2+2n+2$$ Ez pedig $\forall$ n-re igaz

$\Rightarrow$ c_n monoton csökkenő (4)

Tehát a sor Leibniz sor, így konvergens (1)

$s \approx s_{100}$: $|H| \leq c_{101} = \dfrac{101}{2\cdot 101^2-2}$ (3)

6. feladat (12+18=30 pont)

$$a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{6n}, \qquad b_n = \frac{2^{2n}}{4+5^{n+1}}, \qquad c_n = \frac{3n+2}{n^2+4}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ?$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = ?$

b) Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ sor?

Amelyik konvergens, annál adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a.) $$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{3n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{-2}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 =$$

$$=\left(\frac{e^{-2}}{e}\right)^2 = e^{-6}$$ (5)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4+5\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{4^n}{5^n}}_{=\left(\frac{4}{5}\right)^n}\;\frac{1}{4\left(\frac{4}{5}\right)^n+5} = 0\cdot\frac{1}{0+5} = 0$$ (4)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0}\;\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n^2}} = 0\cdot\frac{3+0}{1+0} = 0$$ (3)

an1zh1p101025/4.

b.) $\sum^{\infty} a_n$ divergens, mivel $a_n \to e^{-6} \neq 0$

$\Rightarrow$ nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. 3

$\sum^{\infty} b_n$:

$0 < b_n < \frac{4^n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$; $\frac{1}{5}\sum^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ konv. geom. sor

$\left(|q| = \frac{4}{5} < 1\right) \xrightarrow[\text{maj. kr.}]{} \sum b_n$ konv. 5

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{4^n}{4+5\cdot 5^n} < \frac{1}{5}\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\,\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{101}}{1-\frac{4}{5}}$$ 5

$\sum^{\infty} c_n$:

$c_n = \frac{3n+2}{n^2+4} > \frac{3n}{n^2+4n^2} = \frac{3}{5}\frac{1}{n}$; $\frac{3}{5}\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div.

$\xrightarrow[\text{min. kr.}]{} \sum^{\infty} c_n$ div. 5

Pótfeladatok (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

7. feladat (13 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+2n+3} - \sqrt{n^4+4n^2}\right) = ?$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^4}{(n^2-5)^2} = ?$

a.) $\boxed{8}$

$$a_n = \left(\sqrt{n^4+2n+3} - \sqrt{n^4+4n^2}\right)\frac{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+4n^2}}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+4n^2}} =$$ 2

$$= \frac{n^4+2n+3-(n^4+4n^2)}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+4n^2}} = \frac{-4n^2+2n+3}{\sqrt{n^4+2n+3}+\sqrt{n^4+4n^2}} =$$ 2

$$= \underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n^4}}}_{=\frac{n^2}{n^2}=1} \frac{-4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} \to \frac{-4}{1+1} = -2$$ 4

an1zh1p1010251S.

b.) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^4}{(n^2)^2}}_{=\frac{n^4}{n^4}=1} \frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)^4}{\left(1-\frac{5}{n^2}\right)^2} \to \frac{2^4}{1^2} = 16$ (5)

8. feladat (7 pont)

Adja meg az alábbi sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^{n+1}}{7^n} = ?$$

Két konvergens geometriai sor összegéről van szó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5(-5)^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n - 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^n = \quad (4)$$

$q_1 = \frac{4}{7}$; $|q_1| < 1$ (1) $\quad q_2 = \frac{-5}{7}$, $|q_2| < 1$ (1)

$$= \frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}} - 5\,\frac{-5/7}{1-(-5/7)}$$

(2) (2)

an1z1p1010 25/6.