Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2018. december 19.

1. Az alábbi pszeudokód inputja egy n-szer n-es A tömb, melyben az i. sor j. elemét $A[i,j]$ jelöli ($1 \leq i,j \leq n$). A pszeudokód a futása során a tömb néhány elemét változtatja meg. Mutassa meg, hogy a kód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n)$.

```
for i = 1 to n:
    A[i,i] : = 0
for j = 1 to n:
    if A[1,j] = 1 és A[2,j] = 1:
            A[j,j] : = 1
```

2. Az összefésül eljárás inputját egy k elemű rendezett A tömb és egy ℓ elemű rendezett B tömb alkotja, az eljárás pedig kimenetként egy $k+\ell$ elemű rendezett C tömböt állít elő A és B elemeiből.
Irja le az órán tanult bizonyítást arra, hogy ez az eljárás $O(k+\ell)$ összehasonlítást használ. (Magát az algoritmust nem szükséges részletesen leírni, csak annyiban, amennyiben ez a lépésszám indoklásához szükséges.)

3. Dijkstra algoritmusát futtatjuk az alábbi irányított, élsúlyozott gráfban, az A csúcsból indulva:
A: B(3), C(2); **B**: C(1), D(2), E(5), F(3); **C**: D(4), F(5); **D**: A(1), E(2), F(3); **E**: F(1); **F**: B(3), C(1).
Néhány lépés után a KÉSZ halmazban az A, B, C csúcsok vannak, a d tömb állapota pedig ez:

A	B	C	D	E	F
*	*	*	5	8	6

(a) Melyik csúcs kerül be a következő lépésben a KÉSZ halmazba és miért?
(b) Hogyan néz ki a d tömb, amikor az új csúcs KÉSZ-be kerülése után a szükséges módosítások megtörténnek és miért?

4. Az éllistával adott irányított G gráfban (ahol az x élsúly nem ismert) futtatjuk az a csúcsból a Prim algoritmust és azt tapasztaljuk, hogy az ab, bd, de, bc élek kerülnek be a minimális feszítőfába, ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy x értéke csak 2 lehet.
a: b(1), c(x); **b**: a(1), c(2), d(x); **c**: a(x), b(2), d(3), e(4) ; **d**: b(x), c(3), e(1);
e: d(1), c(4).

5. Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szúrtunk be néhány egész számot, majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (* jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a $h(K) =$ K maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11		13	6	26	*	17			9	10

Adjon meg egy olyan pozitív egész x értéket, ami a táblázatban nem szerepel és aminek a keresése során több lépést kell tennünk, mintha beszúrni akarnánk x-et. Magyarázza is el, hogy hogyan zajlik x keresése és beszúrása.

6. Igaz-e, hogy az éllistájával adott alábbi irányított gráfban a B, C, D, A, E, F sorrend egy topologikus sorrend? Válaszát indokolja.
A: E,F; B: C, D, E; C: A, E; D: E, F; E: -; F: -.

7. Adott két teljes bináris keresőfa, mindegyikben n elemet tárolunk. Adjon $O(\log n)$ elemszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fa minden eleme nagyobb, mint a második fa minden eleme.
(Emlékeztetőül: a teljes bináris fa olyan bináris fa, amiben minden szint tele van.)

8. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányított, egyszerű gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi idő alatt tud az adott szakaszon egy biciklis futár végigmenni.
Egy, az f csúcsban tartózkodó biciklis futár azt a feladatot kapja, hogy a nála levő két csomagot a lehető leggyorsabban kézbesítse ki a város b és c csomópontjaiba (az mindegy, hogy milyen sorrendben kézbesít). Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni és hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben meghatározzuk, hogy milyen sorrendben kell a futárnak a csomagokat leadnia és mennyi a legrövidebb idő, ami alatt teljesíteni tudja a feladatát?