Villamosmérnök A4

8. gyakorlat (2012. 11. 05-06.)

Kétdimenziós valószínűségi változók, vetület- és feltételes eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény: Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó (együttes) eloszlásfüggvénye: $F(x, y) := \mathbb{P}(X < x, Y < y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$; tulajdonságai:

(a) $0 \leq F(x, y) \leq 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$ és minden változójában: balról folytonos, monoton nem-csökkenő;

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$;

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty,\, y \to +\infty} F(x, y) = 1$.

Együttes sűrűségfüggvény: $f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, amennyiben ez utóbbi létezik. Ennek tulajdonságai:

(a) $0 \leq f(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 1$.

Valószínűség az együttes sűrűségfüggvényből: legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges tartomány, ekkor:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint\limits_A f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Vetület (marginális) eloszlás- illetve sűrűségfüggvények: $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y)$, $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y)$, illetve sűrűségfüggvényeik: $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$, $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$. Ezen utóbbiak nem feltétlenül léteznek, de amennyiben van együttes sűrűségfüggvény, akkor igen, és:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}x \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény: akkor definiált ha léteznek a marginális sűrűségfüggvények, ekkor: $F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X < x \,|\, Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, $F_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y < y \,|\, X = x) = \frac{1}{f_X(x)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$. Ha létezik együttes sűrűségfüggvény, akkor a feltételes sűrűségfüggvények rendre:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y}(x|y)}{\partial x} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y|x)}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

feltéve, hogy $f_X, f_Y > 0$.

Azt mondjuk, hogy a **marginálisok (X és Y) függetlenek**, ha $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$. Ugyanez sűrűségfüggvényekkel: $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Folytonos Bayes-formula:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \mathrm{d}y}$$

Diszkrét kétdimenziós eloszlások

1. Egy urnában van 7 piros, 6 kék és 5 zöld golyó. Kihúzunk visszatevés nélkül hármat. Legyen X a kihúzottak közül a pirosak száma, Y pedig a kékeké. Adjuk meg (X, Y) együttes eloszását, és a peremeloszlásokat!

   Megoldás: Összesen 18 golyó van az urnában. Legyen $0 \leq n, m \leq 3$, melyekre $n + m \leq 3$, ekkor

   $$\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{\binom{7}{n}\binom{6}{m}\binom{5}{3-n-m}}{\binom{18}{3}},$$

   a peremeloszlások pedig hipergeometrikusak (ezt lehet közvetlenül vagy az előbbi szummázásával)

   $$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{7}{n}\binom{13}{3-n}}{\binom{18}{3}}; \quad \mathbb{P}(Y = m) \frac{\binom{6}{m}\binom{12}{3-m}}{\binom{18}{3}},$$

   ahol $0 \leq n, m \leq 3$.

2. Először egy (szabályos) kockával dobunk, majd annyi (igazságos) érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk? Adjuk meg az együttes és feltételes eloszlásokat is!

   Megoldás: Az X (perem)eloszlása – a kockadobás eredménye – egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. A dobott fejek száma (Y) függ a kockadobás eredményétől, így $Y \,|\, X = i$ binomiális $n = i$, $p = 1/2$ paraméterrel, ahol $1 \leq i \leq 6$ egész szám. Ebből az együttes eloszlás: $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}(Y=j\,|\,X=i)\mathbb{P}(X=i)=\binom{i}{j}2^{-i}\frac{1}{6}$ $(1\le j\le i$ egész). Azaz $\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=j}^{6}\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{1}{6j!}\sum_{i=j}^{6}i(i-1)\cdots(i-j+1)2^{-i}$. A másik feltételes eloszlás:

$$\mathbb{P}(X=i\,|\,Y=j)=\frac{\mathbb{P}(X=i,Y=j)}{\mathbb{P}(Y=j)}=\frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)2^{-i}}{\sum_{k=j}^{6}k(k-1)\cdots(k-j+1)2^{-k}}.$$

Tehát a kérdésekre a válaszok rendre: $\mathbb{P}(X=4,Y=2)=\binom{4}{2}2^{-4}\frac{1}{6}=\frac{1}{16}=0.0625$, és $\mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{12}\sum_{i=2}^{6}i(i-1)2^{-i}=\frac{99}{12\times 32}=\frac{33}{128}\approx 0.258$.

3. Két kockával dobva, mi a dobott számok

   (a) összegének és különbségének;

   (b) minimumának és maximumának;

   (c) összegének és különbség négyzetének;

   (d) maximumának, illetve összegének;

   az együttes eloszlása? Függetlenek-e a marginálisok egymástól? Ha nem, számítsuk ki a $\mathbb{P}(X=n,Y=m)-\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=m)$, illetve $\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ értékét, ahol (X,Y) jelöli a részfeladatoknak megfelelő valószínűségi változó párt.

   Megoldás: Jelölje U, illetve V a két független kockadobás eredményét.

   (a) Ha $2\le n\le 12$, $-5\le m\le 5$ és $n>m$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U+V=n,U-V=m)&=\mathbb{P}\left(U=\frac{n+m}{2},V=\frac{n-m}{2}\right)=\mathbb{P}\left(U=\frac{n+m}{2}\right)\mathbb{P}\left(V=\frac{n-m}{2}\right)=\\&=\begin{cases}\frac{1}{36}, & \text{ha } n+m \text{ és } n-m \text{ is páros;}\\ 0, & \text{ha } n+m \text{ vagy } n-m \text{ nem páros.}\end{cases}\end{aligned}$$

   Nem független $U+V$ az $U-V$-től. Ezt a tényt például mutatja az $n=10$, $m=-5$ választás, hiszen ekkor az együttes valószínűség: $\mathbb{P}(U+V=n,X-Y=m)=0$, de $\mathbb{P}(U+V=n)=1/12$ és $\mathbb{P}(U-V=-5)=1/36$. Hasonlóan felírható az összes ilyen valószínűség. Végül $\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}[(U+V)(U-V)]-\mathbb{E}(U+V)\mathbb{E}(U-V)=0$, mert U,V azonos eloszlású és $(U+V)(U-V)=U^2-V^2$ (erre a 9. feladatsorban azt fogjuk mondani, hogy korrelálatlanok de nem függetlenek).

   (b) A két valószínűségi változó (min. és max.) együttes eloszlása: ha $1\le n,m\le 6$, akkor

$$\mathbb{P}(\min(U,V)=n,\max(U,V)=m)=\begin{cases}\frac{1}{36}, & \text{ha } n=m;\\ \frac{1}{18}, & \text{ha } n<m.\\ 0, & \text{egyébként;}\end{cases}$$

   ebből meghatározható a két marginális is, amelyek nem lesznek függetlenek! (gondoljuk meg miért, vagy nézzük meg a 9. feladatsor 2. feladatát)

   (c) Ha $2\le n\le 12$, $1\le k\le 5$ és $n>k$, akkor

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(U+V=n,(U-V)^2=k^2)=\mathbb{P}(U+V=n,U-V=k)+\mathbb{P}(U+V=n,U-V=-k)=\\&=\mathbb{P}\left(U=\frac{n+k}{2},V=\frac{n-k}{2}\right)+\mathbb{P}\left(U=\frac{n-k}{2},V=\frac{n+k}{2}\right)=\\&=2\mathbb{P}\left(U=\frac{n+k}{2}\right)\mathbb{P}\left(V=\frac{n-k}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{18}, & \text{ha } 2\,|\,n+k;\ 2\,|\,n-k;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}\end{aligned}$$

   A marginálisok nem függetlenek, mert például: $\mathbb{P}(U+V=4,(U-V)^2=9)=0$, de $\mathbb{P}(U+V=4)=\frac{3}{36}$ és $\mathbb{P}((U-V)^2=9)=\mathbb{P}(U-V=3)+\mathbb{P}(U-V=-3)=2\frac{3}{36}=\frac{1}{6}$. Többi számolást lásd 9. feladatsor 2. feladatában.

   (d) Ha $1\le m\le 6$ és $2\le k\le 12$, akkor

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\max(U,V)=m,\,U+V=k)=\mathbb{P}(\max(U,V)=m,\,\max(U,V)+\min(U,V)=k)=\\&=\mathbb{P}(\max(U,V)=m,\,\min(U,V)=k-m)=\mathbb{P}(\min(U,V)=n,\max(U,V)=m),\end{aligned}$$

   ahol $n=k-m$ jelölést használtuk. Ez utóbbit pedig már a (c) részben meghatároztuk. Számoljuk ki a marginálisokat! Nem lesznek függetlenek, mivel például: $\mathbb{P}(\max(U,V)=1,U+V=3)=0$, de $\mathbb{P}(\max(U,V)=1)=\frac{1}{36}$ és $\mathbb{P}(U+V=3)=\frac{1}{18}$. $\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\min(U,V)\max(U,V))-\mathbb{E}\min(U,V)\mathbb{E}\max(U,V)+\mathbb{E}(\min(U,V)^2)-(\mathbb{E}\min(U,V))^2\approx 0.945+1.96=2.905$, lásd hozzá a 9. feladatsor 2. példáját.

4. Kockával dobva az első, illetve második páros dobáshoz szükséges időt jelölje X_1 illetve X_2. Mi az eloszlása (X_1,X_2) párnak? Adjuk meg a feltételes eloszlásokat is!

   Megoldás: X_1 eloszlása geometriai, a siker valószínűsége: $1/6$. Jelölje X_1' az első és második páros dobás közötti dobások számát. Ez is geometriai és nyilvánvalóan X_1-től független, valamint X_1+X_1' eloszlása X_2 eloszlásával egyezik meg, tehát, ha $1\le n<m$, akkor

$$\mathbb{P}(X_2=m\,|\,X_1=n)=\mathbb{P}(X_1+X_1'=m\,|\,X_1=n)=\mathbb{P}(X_1'=m-n\,|\,X_1=n)=\mathbb{P}(X_1'=m-n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{m-n-1}\frac{1}{6},$$

ahol utolsó előtti lépésben használtuk a függetlenséget (azért hagyhattuk el a feltételt a valószínűségből). Ebből az együttes eloszlás:

$$\mathbb{P}(X_2 = m, X_1 = n) = \mathbb{P}(X_2 = m \,|\, X_1 = n)\mathbb{P}(X_1 = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n-1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{m-2}\frac{1}{6^2},$$

ha $1 \le n < m$; egyébként 0. X_2 eloszlása:

$$\mathbb{P}(X_2 = m) = \sum_{n=1}^{m-1}\mathbb{P}(X_2 = m, X_1 = n) = \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-2}\frac{1}{6^2} = (m-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{m-2}\frac{1}{6^2},$$

amin nem lepődünk meg, hiszen ez a jólismert negatív binomiális eloszlás (várunk a második sikerre). Ebből a másik feltételes eloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = n \,|\, X_2 = m) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = m, X_1 = n)}{\mathbb{P}(X_2 = m)} = \frac{1}{m-1},$$

ahol $1 \le n \le m-1$, egyébként 0. Azaz feltéve, hogy m. dobásnál dobtunk másodszorra párosat, az első párosdobás ideje egyenletes eloszlású $\{1, 2, \ldots, m-1\}$-ben. Vesd össze ezt a 26. feladattal.

5. A hamis érme p valószínűséggel mutat fejet, $1-p$ valószínűséggel írást ($p \neq \frac{1}{2}$). Ezt az érmét feldobjuk tízszer és felírjuk hányszor dobtunk fejet. Majd ezt a kísérletet – előbbitől függetlenül – megismételjük. Feltéve, hogy összesen 7 fejet dobtunk, mi az eloszlása az első kísérletben dobott fejek számának?

   Megoldás: Ez hipergeometrikus eloszlású lesz. Lássuk: jelölje X az első kísérletben dobott fejek számát (ez $(10, p)$ binomiális eloszású), és Y – X-től független – a második kísérletben dobott fejek számát (ez is $(10, p)$ binomiális eloszlású). Ekkor a kérdezett valószínűség (p-től függetlenül):

$$\mathbb{P}(X = n \,|\, X+Y = 7) = \frac{\mathbb{P}(X = n, X+Y = 7)}{\mathbb{P}(X+Y = 7)} = \frac{\mathbb{P}(X = n, Y = 7-n)}{\sum_{k=0}^{7}\mathbb{P}(X+Y = 7 \,|\, X = k)\mathbb{P}(X = k)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = 7-n)}{\sum_{k=0}^{7}\mathbb{P}(Y = 7-k)\mathbb{P}(X = k)} = \frac{\binom{10}{n}p^n(1-p)^{10-n}\binom{10}{7-n}p^{7-n}p^{3+n}}{\sum_{k=0}^{7}\binom{10}{7-k}p^{7-k}(1-p)^{3+k}\binom{10}{k}p^k(1-p)^{10-k}} = \frac{\binom{10}{n}\binom{10}{7-n}}{\sum_{k=0}^{7}\binom{10}{7-k}\binom{10}{k}} = \frac{\binom{10}{n}\binom{10}{7-n}}{\binom{10}{k}},$$

   ahol $0 \le n \le 7$ és felhasználtuk X, Y függetlenségét (miért igaz az utolsó egyenlőség?).

6. Egy drogériába érkező emberek 60%-a nő. Egy adott órában átlagosan 10 ember jár a drogériában. Feltéve, hogy 10 nő lépett be az utóbbi egy órában, mi annak a valószínűsége, hogy még 3 férfi járt ott?

   Megoldás: Jelölje M (F) azon férfiak (nők) számát akik egy órában a drogériában jártak. Természetes, hogy M-et (és F-et is) Poisson eloszlásúnak tekintjük m (f) paraméterrel, egymástól függetlenül. A feladat szövege alapján $10 = \mathbb{E}M + \mathbb{E}F = m + f$, valamint $f = \mathbb{E}(0.6(X+Y)) = 0.6(m+f) = 6$, $m = 4$. Ezekből:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 3 \,|\, X+Y = 10) &= \frac{\mathbb{P}(X = 3, X+Y = 10)}{\mathbb{P}(X+Y = 10)} = \frac{\mathbb{P}(X = 3, Y = 7)}{\mathbb{P}(X+Y = 10)} = \\ &= \frac{\frac{4^3}{3!}\exp(-4)\frac{6^7}{7!}\exp(-6)}{\frac{10^{10}}{10!}\exp(-10)} = \binom{10}{3}\frac{4^3 6^7}{10^{10}} \approx 0.215.\end{aligned}$$

   Ahol használtuk, hogy két független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású (a paramétere pedig az egyes paraméterek összege), ugyanis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y = n) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Y = n-k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{n-k}}{(n-k)!}\exp(-f)\frac{m^k}{k!}\exp(-m) = \\ &= \frac{1}{n!}\exp(-(m+f))\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{n-k}m^k = \frac{(m+f)^n}{n!}\exp(-(m+f)).\end{aligned}$$

7. Kockával dobunk addig, amíg nem páros szám jön! Ehhez szükséges dobások számát jelölje N és legyen X az első nem páros dobás értéke. Mi az eloszlása X-nek, illetve N-nek? Független-e X N-től? Adjuk meg az együttes eloszlásukat is!

   Megoldás: Az első nem páros dobás (X) értéke: $\{1, 3, 5\}$-ból kerül ki egyenlő valószínűséggel. N eloszlása pedig geometriai, a siker valószínűsége: $1/2$. X N-től független, hiszen semmilyen információt nem ad az a tény, hogy N-edikre dobtunk nem párosat arra vonatkozóan, hogy mi a nem páros dobás értéke, avagy megfordítva: az, hogy az első páros dobás mi lett nem befolyásolja azt, hogy ezt hanyadikra dobtuk ki. Emiatt együttes eloszlásuk szorzat-eloszlás:

$$\mathbb{P}(X = x, N = n) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2} \quad (x = 1, 3, 5;\ n = 1, 2, \ldots)$$

Folytonos kétdimenziós eloszlások

8. Lehet-e egy (X, Y) pár eloszlásfüggvénye az alábbi függvények közül valamelyik? Ha igen, adjuk meg az együttes-vetület- és feltételes sűrűségfüggvényeket is (amennyiben léteznek)!

(a)

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\exp(-x)-\exp(-y)+\exp(-(x+y)), & \text{ha } 0<x,y;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(b)

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\exp(-x)-\exp(-y)-x\exp(-x)+(1+x)\exp(-(x+y)), & \text{ha } 0<x,y;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(c)

$$F(x,y)=F(y,x)=\begin{cases}1, & \text{ha } 1\le x;\ 1\le y\le x;\\ y(1-y+\min(x,1)), & \text{ha } 0\le x;\ 0\le y\le \min(x,1);\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Megoldás:

(a) Igen, ez együttes eloszlásfüggvény: két független 1 paraméterű exponenciális együttes eloszlásfüggvénye; így a perem- és feltételes eloszlások is exponenciálisok.

(b) Igen, ez is együttes eloszlásfüggvény: független $(2,1)$ paraméterű gamma illetve 1 paraméterű exponenciális együttes eloszlásfüggvénye; így az egyik perem/feltételes eloszlás gamma másik exponenciális.

(c) Ez nem lehet eloszlásfüggvény, mert ha az lenne, akkor például az Y marginálisának eloszlásfüggvénye $F_Y(y)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=y(1-y)$ $(0\le y\le 1)$ lenne, ami pedig nem eloszlásfüggvény (nem monoton).

9. Lehet-e egy (X,Y) pár együttes sűrűségfüggvénye az alábbi függvények közül valamelyik? Ha igen, adjuk meg a marginális- és feltételes sűrűségfüggvényeket is! Független-e X Y-tól?

(a)

$$f(x,y)=\begin{cases}2\exp(-(x+2y)), & \text{ha } 0\le x,y;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(b)

$$f(x,y)=\begin{cases}2x+2y, & \text{ha } 0<x<1;\ 0<y<1;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(c)

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & \text{ha } 0\le x;\ 0\le y \text{ és } 0\le x+y\le 1;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Megoldás:

(a) A nemnegativitás teljesül, és az integrál is okés, ugyanis (X,Y) független exponenciális eloszlású változók együttes eloszlása (az egyik 1- a másik 2 paraméterű).

(b) Nem lehet együttes sűrűségfüggvény, hiszen: $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(2x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\ne 1$.

(c) Nemnegativitás pipa, integrál: $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}24xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{1}12x(1-x)^2\mathrm{d}x=12(1/2-2/3+1/4)=1$. X (Y) sűrűségfüggvénye: $f_X(x)=12x(1-x)^2$ $(f_Y(y)=12x(1-x)^2)$, ahol $0\le x\le 1$ $(0\le y\le 1)$. Tehát nem függetlenek, feltételes eloszlások a $f(x,y)/f_X(x)$ illetve $f(x,y)/f_Y(y)$ hányadosok adják.

10. Lőjük be a $C>0$ konstans értékét úgy, hogy az alábbiak sűrűségfüggvények legyenek:

(a)

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy(1-x), & \text{ha } 0<x<1;\ 0<y<1;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(b)

$$f(x,y)=\begin{cases}C(y^2-x^2)\exp(-y), & \text{ha } 0<y<+\infty;\ -y<x<y;\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Legyen (X,Y) pár együttes sűrűségfüggvénye f. Független-e X Y-tól? Számítsuk ki $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ és $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ értékét!

Megoldás:

(a) Kell: $1=C\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}xy(1-x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=C(1/4-1/6)$, azaz $C=12$-re f sűrűségfüggvény. X és Y független mert egységnégyzeten vagyunk, marginális sűrűségfüggvények: $f_X(x)=6x(1-x)$ $(0\le x\le 1)$; $f_Y(y)=2y$ $(0\le y\le 1)$. Ezért $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. $\mathbb{E}X=\int_{x=0}^{1}x\,6x(1-x)\,\mathrm{d}x=1/2$, $\mathbb{E}Y=\int_{y=0}^{1}y\,2y\,\mathrm{d}y=2/3$, $\mathbb{E}(X^2)=\int_{x=0}^{1}x^2\,6x(1-x)\,\mathrm{d}x=3/10$, $\mathbb{E}(Y^2)=\int_{y=0}^{1}y^2\,2y\,\mathrm{d}y=1/2$. Ebből $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=1/20$, és $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)=1/18$.

(b) Kell: $1=\int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=-y}^{y}C(y^2-x^2)\exp(-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4C/3\int_{y=0}^{+\infty}y^3\exp(-y)\,\mathrm{d}y=8C$, azaz $C=1/8$. Y sűrűségfüggvénye $f_Y(y)=y^3\exp(-y)/3!$ $(y\ge 0)$, azaz $(4,1)$ paraméterű gamma eloszlású (várható értéke: 4, szórása: 2), míg X sűrűségfüggvénye: $f_X(x)=\frac{1}{8}\int_{y=x}^{+\infty}(y^2-x^2)\exp(-y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}((x^2+2x+2)\exp(-x)-x^2\exp(-x))=(x+1)\exp(-x)/4$, ha $x>0$; egyébként pedig $f_X(x)=\frac{1}{8}\int_{y=-x}^{+\infty}(y^2-x^2)\exp(-y)\,\mathrm{d}y=(-x+1)\exp(x)/4$, azaz

$f_X(x) = (|x|+1)\exp(-|x|)/4$. Vagyis Y X-től nem független.

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{8}\int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=-y}^{y} xy\,(y^2-x^2)\exp(-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(rögzített y-ra: páratlan x hatványokat integrálunk szimmetrikus, origó körüli intervallumon, ezért a 0). Pont ezért lesz $\mathbb{E}X = 0$, végül:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{8}\int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=-y}^{y} x^2\,(y^2-x^2)\exp(-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{30}\int_{y=0}^{+\infty} y^5\exp(-y)\,\mathrm{d}y = 4.\end{aligned}$$

11. Legyen az (X,Y) pár egyenletes a $(0,0)$ középpontú 2 hosszúságú négyzetben. Mi az eloszlása X-nek, Y-nak? Függetlenek-e? Adjuk meg a $\mathbb{P}(X^2+Y^2\le 1)$ értékét!

   Megoldás: X, Y egyenletes eloszlású a $(-1,1)$ intervallumban, függetlenek, együttes eloszlásuk egyenletes az origó középpontú 2 hosszúságú négyzetben (itt $1/4$ a sűrűségfüggvényének értéke egyébként 0). Így a $\mathbb{P}(X^2+Y^2\le 1)$ valószínűség két terület hányada; összterület $2\times 2 = 4$, ebből az $\{(x,y),\, x^2+y^2\le 1\}$ körlap területe π (kedvező terület), azaz $\mathbb{P}(X^2+Y^2\le 1) = \pi/4 \approx 0.785$.

12. Egy (egységsugarú) körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

   Megoldás: Mivel az egységsugarú körben egyenletes eloszlás szerint választunk pontot, ezért a szóban forgó valószínűség 'kedvező terület' per 'összterület', ahol a kedvező rész a hatszög területe, ami 6 egyenlő (1-ségnyi) oldalú háromszög területe azaz $3\sqrt{3}/2$; az összterület pedig π, azaz $\mathbb{P}(X$ véletlen pont beleesik a hatszögbe$) = 3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$

13. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $1/4$ területegységnél?

   Megoldás: Jelölje X (Y) a téglalap vízszintes (függőleges) oldalának véletlen hosszát, mindkettő egyenletes $(0,1)$-ben, ráadásul függetlenek, így együttes sűrűségfüggvényük az egységnégyzeten ($[0,1]\times[0,1]$-en) konstans 1; egyébként zérus. Azaz a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(2X+2Y>2, XY<1/4) = \iint\limits_{2x+2y>2,\,xy<1/4} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y == \iint\limits_{0<x<1,\;1-x<y<1/(4x)} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{x=0}^{1/4}\int_{y=1-x}^{1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=1/4}^{1}\int_{y=1-x}^{1/(4x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{32} + \int_{x=1/4}^{1}(1/(4x)-1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\log(4)-1)\approx 0.1.$$

   Ahol kihasználtuk, hogy az $y_1(x) = 1-x$ egyenes az $y_2(x) = 1/(4x)$ hiperbola alatt halad a pozitív negyedben (y_2 érintőegyenese az $x = 1/2$ pontban éppen az y_1).

14. Két, egymástól független, véletlen számot generálunk a $(0,1)$ intervallumból. Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám távolsága kisebb, mint a kisebbik szám? A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi a valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

   Megoldás: Jelölje X,Y a két független egyenletes pontot a $(0,1)$ intervallumban. Együttes sűrűségfüggvényük konstans 1 a $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten; egyébként zérus. Tehát

$$\mathbb{P}(|X-Y|<\min(X,Y)) = \iint\limits_{|x-y|<\min(x,y)} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x/2}^{x} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{y=x}^{2x} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x=0}^{1}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{1/2} x\,\mathrm{d}x + \int_{x=1/2}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

   <u>Másik megoldás:</u>
   <u>Tudjuk, hogy $\min(X,Y) = (X+Y-|X-Y|)/2$.</u> Ezért $\mathbb{P}(|X-Y|<\min(X,Y)) = \mathbb{P}(3|X-Y|<X+Y) = \mathbb{P}(Y\le X\le 2Y) + \mathbb{P}(X\le Y\le 2X) = 2\mathbb{P}(X\le Y\le 2X)$, ahol – egyenletes eloszlás lévén területarányokkal számolva – utóbbi valószínűség: $1/2-1/4 = 1/4$ (ez a $\{(x,y)\in(0,1)^2\,|\,x\le y\le 2x\}$ háromszög területe per összterület, ami 1).
   Annak a feltétele, hogy a három részintervallumból háromszöget tudjunk szerkeszteni az kell, hogy $\min(X,Y) < 1/2 < \max(X,Y)$ és $\max(X,Y)-\min(X,Y) < 1/2$ (gondoljuk meg ezt), azaz

$$\mathbb{P}\left(\min(X,Y)<\frac{1}{2}<\max(X,Y), \max(X,Y)-\min(X,Y)<\frac{1}{2}\right) = \iint\limits_{\substack{\min(x,y)<1/2<\max(x,y),\\ \max(x,y)-\min(x,y)<1/2}} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{x<1/2<y,\,y-x<1/2,\,x\le y} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{y<1/2<x,\,x-y<1/2,\,x>y} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{x=0}^{1/2}\int_{y=1/2}^{x+1/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{y=0}^{1/2}\int_{x=1/2}^{y+1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1/2} x\,\mathrm{d}x + \int_{y=0}^{1/2} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

15. Egy mentőautó folyamatosan szállít sérületek két, 10 km-re található város között. Minden időpillanatban a mentőkocsi pozíciója egyenletes eloszlású a két város között. Egyszercsak egy baleset történik valahol a két város között. A baleset helye szintén egyenletes eloszlású, de független a mentőkocsi pozíciójától. Mi annak a valószínűsége, hogy a baleset helytől legfeljebb 1 km-re található a mentőkocsi?

Megoldás: Grafikusan a legegyszerűbb megoldani ezt a feladatot, mivel egyenletes eloszlásról van szó, kedvező terület per összterület (ami itt 100) képlettel dolgozunk. A $[0,10]\times[0,10]$ négyzetben az $y(x) = x\pm 1$ egyenesek által közbezárt terület lesz kedvező (hiszen pont itt lesz $|x-y|\le 1$). Így a valószínűség $(100-9\times 9)/100 = 19/100 = 0.19$.
Másik megoldás: (hosszabb, itt integrálunk)
Jelölje a mentőautó véletlen helyét: X, ez egyenletes a $(0,10)$ intervallumban, ettől független a baleset helye, amit Y jelöl, és ami szintén egyenletes $(0,10)$-en, együttes sűrűségfüggvényük: $\frac{1}{100}$ a $[0,10]\times[0,10]$ négyzeten, különben zérus. Tehát a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-Y|\le 1) &= \iint\limits_{|x-y|\le 1} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{10}\int_{y=x-1}^{x+1} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{100}\left(\int_{x=0}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{9} 2\,\mathrm{d}x + \int_{x=9}^{10}(10-x+1)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{19}{100}.\end{aligned}$$

16. X_1, X_2, X_3 három véletlen pontot jelöl a $[0,3]$ intervallumból. Mi annak a valószínűsége, hogy az X_2 pont X_1 és X_3 között helyezkedik el?

Megoldás: A három véletlen pont legyen független egymástól. Az együttes sűrűségfüggvényük ezért a $[0,3]^3$ kockán $1/27$; egyébként 0. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3) &= \iiint\limits_{0\le x_1<x_2<x_3\le 3} f_{(X_1,X_2,X_3)}(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{27}\int_{x_1=0}^{3}\int_{x_2=x_1}^{3}\int_{x_3=x_2}^{3}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \\ &= \frac{1}{27}\int_{x_1=0}^{3}\int_{x_2=x_1}^{3}(3-x_2)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{27}\int_{x_1=0}^{3}\frac{(3-x_1)^2}{2}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{27}\frac{3^3}{2\times 3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Szimmetria miatt

$$\mathbb{P}(X_2\ X_1 \text{ és } X_3 \text{ között van}) = \mathbb{P}(X_1<X_2<X_3) + \mathbb{P}(X_3<X_2<X_1) = 2\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3) = \frac{1}{3}.$$

Másik megoldás: (számolás nélkül)
Szimmetria miatt: $\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3) = \mathbb{P}(X_i<X_j<X_k)$, ahol (i,j,k) tetszőleges az $(1,2,3)$ sorozat egy permutációja (itt azt sem kell feltennünk, hogy $[0,3]$-ban vagyunk). Az összes permutációra az előbbi valószínűségeket összegezve 1-et kapunk ezért valóban $\mathbb{P}(X_1<X_2<X_3) = 1/3!$.

17. Legyen X, Y két független, egyenletes eloszlású pont a $(0,1)$-ben. Mi az eloszlása $U = X+Y$-nak és $V = X-Y$-nak? Mi az (U,V) pár eloszlása? Független-e U V-től?

Megoldás: Az (X,Y) párból kapunk egy (U,V) párt, tehát ezen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transzformáció Jacobi-determinánsával szorzódik a terület. Azoknak, akik tudják, hogy ez mit jelent: ha $0\le u\le 2$ és $-1\le v\le 1$, akkor

$$\begin{aligned}f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \mathbb{P}(X+Y\approx u, X-Y\approx v) = \mathbb{P}\left(X\approx\frac{u+v}{2}, Y\approx\frac{u-v}{2}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(X\approx\frac{u+v}{2}\right)\mathbb{P}\left(Y\approx\frac{u-v}{2}\right) \underset{y:=(u-v)/2}{\overset{x:=(u+v)/2}{=}} f_X(x)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= f_X\left(\frac{u+v}{2}\right)f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)|\det(J(u,v))|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

ahol az áttérés ($x := (u+v)/2$, $y := (u-v)/2$) Jacobi-mátrixa:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Így $|\det(J(u,v))| = |-1/2^2 - 1/2^2| = 1/2$. Azaz $f_{(U,V)}(u,v) = 1/2$, ha $0\le u\le 2$ és $-1\le v\le 1$ és $0\le u+v\le 2$, $0\le u-v\le 2$; egyébként 0. Azaz (U,V) eloszlása egyenletes egy négyzeten, melyet a $(0,0), (1,1), (2,0)$, illetve $(1,-1)$ pontok feszítenek ki.

Ugyanez low-tech verzióban:

$$\mathbb{P}\big(X+Y\in(u,u+\Delta u)\,\big|\,X-Y\in(v,v+\Delta v)\big) \approx \mathbb{P}\Big(X\in\Big(\frac{u+v}{2},\frac{u+\Delta u+v}{2}\Big)\,\Big|\,X-Y\in(v,v+\Delta v)\Big) \approx \frac{\Delta u/2}{1-|v|},$$

föltéve, hogy $-1\le v\le 1$ illetve $v\le(u+v)/2, (u+\Delta u+v)/2\le 1$ ha $v\ge 0$ és $0\le(u+v)/2, (u+\Delta u+v)/2\le 1+v$ ha $v\le 0$, hiszen megnézve, hogy a feltétel mit jelent az (X,Y) egységnégyzetben, látjuk, hogy X lényegében egyenletes egy $1-|v|$ hosszú szakaszon. Eközben

$$\mathbb{P}\big(X-Y\in(v,v+\Delta v)\big) \approx (1-v)\sqrt{2}\cdot\frac{\Delta v}{\sqrt{2}}.$$

Tehát összeségében
$$\mathbb{P}\big(X+Y\in(u,u+\Delta u),\, X-Y\in(v,v+\Delta v)\big)\approx\frac{\Delta u\,\Delta v}{2}\,,$$
ha $0\le(u+v)/2\le1$ és $0\le(u-v)/2\le1$, akárcsak az előbb.

Marginális sűrűségfüggvények: ha $u\le1$, akkor $f_U(u)=\int_{v=-u}^{u}f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=u$. egyébként ($1\le u\le2$): $f_U(u)=\int_{v=u-2}^{2-u}f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2-u$. Ez egy háztető függvény, aminek $u=1$-ben van a csúcspontja. Ugyanennek a háztetőnek az egy egységgel balra toltja adja V sűrűségfüggvényét (gondoljuk ezt meg)! Ebből síkidimok területszámításával rögtön kijön az eloszlásfüggvény is.

Avagy anélkül, hogy tudnánk az együttes eloszlásfüggvényt, direktbe is kiszámíthatjuk (analitikusan) mondjuk U eloszlásfüggvényét: ha $0\le u\le1$, akkor $F_{X+Y}(u)=\mathbb{P}(X+Y<u)=\int_{y=0}^{u}\mathbb{P}(X<u-y)\times1\,\mathrm{d}y=\int_{y=0}^{u}(u-y)\,\mathrm{d}y=u^2/2$, ha pedig $1\le u\le2$, akkor meg $F_{X+Y}(u)=\int_{y=0}^{1}\mathbb{P}(X<u-y)\times1\,\mathrm{d}y=\int_{y=0}^{u-1}1\,\mathrm{d}y+\int_{y=u-1}^{1}(u-y)\,\mathrm{d}y=u-1+u(2-u)-1/2+(u-1)^2/2=2u-u^2/2-1$. Mindkét esetben használtuk a teljes valószínűség tételét meg azt, hogy X, Y sűrűségfüggvénye $(0,1)$-en 1.
Ezért (is) U a V-től nem független, de $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(UV)-\mathbb{E}U\mathbb{E}V=\mathbb{E}(X^2-Y^2)-\mathbb{E}U(\mathbb{E}X-\mathbb{E}Y)=0$, mert X, Y azonos eloszlású.

18. 4 véletlen számot generáltunk a $[0,1]$ intervallumból, majd rendeztük őket. Mi a rendezett számok együttes sűrűségfüggvénye? Mi a második és negyedik legnagyobb szám együttes eloszlása? Adjuk meg a marginális sűrűségfüggvényeket, hogyan neveztük az egydimenziós vetület eloszlásokat? Feltéve, hogy a második legnagyobb szám legalább 0.5, mi az eloszlása a legnagyobb számnak?

Megoldás: A 4 független egyenletes számot jelölje $V:=(U_1^*,U_2^*,U_3^*,U_4^*)$; együttes sűrűségfüggvényük:
$$\begin{aligned}f_V(x_1,x_2,x_3,x_4)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 &= \mathbb{P}(U_1^*\approx x_1,U_2^*\approx x_2,U_3^*\approx x_3,U_4^*\approx x_4)=\\ &= \binom{4}{1}\mathrm{d}x_1\binom{3}{1}\mathrm{d}x_2\binom{2}{1}\mathrm{d}x_3\binom{1}{1}\mathrm{d}x_4=4!\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4,\end{aligned}$$
ha $0\le x_1<x_2,x_3<x_4\le1$, egyébként pedig 0.
Második és negyedik szám együttes eloszlását megkaphatjuk a fent kijött sűrűségfüggvény megfelelő tartomány vett integrálásából, vagy direktbe hasonlóan az előbbiekhez is kijön. Az előbbi utat választjuk:
$$f_{(U_2^*,U_4^*)}(x_2,x_4)=\iint\limits_{[0,1]^2}f_V(x_1,x_2,x_3,x_4)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3=\int_{x_3=x_2}^{x_4}\int_{x_1=0}^{x_2}4!\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3=4!x_2(x_4-x_2).$$
ha $0\le x_2<x_4\le1$, egyébként 0.
A marginális eloszlások az úgynevezett béta-eloszlások nevét viselik (ezzel/ilyenekkel már találkoztunk/fogunk még találkozni), például:
$$f_{U_2^*}(x_2)=\int_{x_4=x_2}^{1}4!x_2(x_4-x_2)\,\mathrm{d}x_4=4!x_2\frac{(1-x_2)^2}{2}=\frac{4!}{1!1!2!}x_2(1-x_2)^2,$$
ha $0\le x_2\le1$, egyébként 0. Ebből U_2^* eloszlásfüggvénye: $F_{U_2^*}(x_2)=1-(1-x_2)^4-4x_2(1-x_2)^3$, ha $0\le x_2\le1$.
Végül meghatározzuk a $F(x):=\mathbb{P}(U_4^*<x\,|\,U_2^*>1/2)$ valószínűséget (x rögzített $(1/2,1)$-beli szám). Az előzőekből: $\mathbb{P}(U_2^*>1/2)=1-F_{U_2^*}(1/2)=1/16+1/4=5/16$. Tehát
$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{\mathbb{P}(U_4^*<x,U_2^*>1/2)}{\mathbb{P}(U_2^*>1/2)}=\frac{16}{5}\iint\limits_{x_4<x,x_2>1/2}f_{(U_2^*,U_4^*)}(x_2,x_4)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4=\\ &=\frac{16}{5}\int_{x_4=1/2}^{x}\int_{x_2=1/2}^{x_4}4!x_2(x_4-x_2)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4=\frac{16}{5}\int_{x_4=1/2}^{x}(1-3x_4+4x_4^3)\,\mathrm{d}x_4=\frac{16}{5}(x^4-3x^2/2+x-3/16).\end{aligned}$$

19. Egy kisiskolában három egymás mellett ülő, különösen virgonc gyerek a kicsöngetést követően felpattant a helyéről és kiszaladt az osztályteremből a 20 méterre található büfébe. A négy gyerek véletlen sebessége: U_1,U_2, illetve U_3 m/s, melyek független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók $[0,4]$-en. Az osztályfőnök – látva a rendetlenséget – 5 másodperc után rájuk szólt, mire a gyerekek azon nyomban megálltak. Mi az első, második, illetve utolsó gyerek pozíciójának a sűrűségfüggvénye? Mi az első és második, illetve második és harmadik gyerek pozíciójának együttes sűrűségfüggvénye? Mi az első és utolsó gyerek pozíciójának együttes sűrűségfüggvénye? Mi az utolsó két gyerek által megtett összes út eloszlása? Mennyi a gyerekek által megtett összes út várható értéke?

Megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket: $Z_i:=5U_i$ (másodperc), ahol $i=1,2,3$. Z_i tehát az i. gyerek által megtett út (5 másodperc alatt). Z_i'k független, azonos, egyenletes eloszlásúak a $[0,15]$ intervallumban (miért?)
Jelölje Z_i^* a sorban i. gyerek pozícióját. Ekkor Z_i^*'k eloszlása béta (pontosabban a béta egy transzformáltja), például Z_3^* sűrűségfüggvénye:
$$F_{Z_3^*}(z_3)=\mathbb{P}(Z_3^*<z_3)=\mathbb{P}(\text{mind a három pozíció }(0,z_3)\text{-ba esik})=\frac{z_3^3}{15^3},$$
ha $0\le z_3\le15$. Hasonlóan határozható meg a maradék Z_i^*'k eloszlásfüggvénye is.
Nem számoljuk ki az összes gyerekpár együttes sűrűségfüggvényét, csak egyet, a többi hasonlóan számolható, tehát pl.: 2. és 3. gyerek pozíciójának sűrűségfüggvénye
$$f_{(Z_2^*,Z_3^*)}(z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3=\mathbb{P}(Z_2^*\approx z_2,Z_3^*\approx z_3)=\binom{3}{1}\frac{z_2}{15}\binom{2}{1}\frac{\mathrm{d}z_2}{15}\binom{1}{1}\frac{\mathrm{d}z_3}{15},$$

ha $0 \le z_2 \le z_3 \le 15$; $\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$-mal osztva, majd velük 0-ba tartva adódik a sűrűségfüggvény, ami $f_{(Z_2^*,Z_3^*)}(z_2,z_3) = \frac{3!}{1!1!1!}\frac{1}{15^3}z_2$.
Az utolsó két gyerek által megtett összes út eloszlása:

$$\begin{aligned} f_{Z_2^*+Z_3^*}(z) &= \int\limits_{z_3=0}^{30} f_{(Z_2^*,Z_3^*)}(z-z_3,z_3)\,\mathrm{d}z_3 = \frac{3!}{15^3}\int_{z_3=z/2}^{\min(z,15)}(z-z_3)\,\mathrm{d}z_3 = \frac{1}{5\times 15^2}\left(\frac{z^2}{4}-(z-\min(z,15))^2\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{z^2}{4500}, & \text{ha } 0 \le z \le 15; \\ \frac{1}{1125}\left(-225+30z-\frac{3}{4}z^2\right), & \text{ha } 15 \le z \le 30; \end{cases} \end{aligned}$$

egyébként ez a sűrűségfüggvény 0.
A három gyerek által megtett összes út várható értéke pedig: $Z_1^*+Z_2^*+Z_3^* = Z_1+Z_2+Z_3$ valószínűségi változó várható értéke, ez meg $3\times\frac{15}{2} = 22.5$ (m).

20. Egy gyárban 5 gép üzemel egy gyártási sor mentén. Ezek bármelyike idővel elromolhat, de – költségkímélés miatt – csak akkor állítják le őket és nyúlnak hozzájuk, ha már legalább 3 gép nem üzemel, ugyanis legfeljebb 2 kiesett gépet még a maradék tud helyettesíteni. A gépek üzemelési ideje egymástól független, exponenciális eloszlású, mindannyiszor 1000 óra várható értékkel. Mi az eloszlása az első elromló gép működési idejének? És a másodiknak? Mi a sűrűségfüggvénye az első két elromló gép összes működési idejének? Mennyi annak az időnek az eloszlása, amíg nem kell leállítani őket, azaz míg legalább 3 üzemel? Várhatóan hány óra múlva kell hozzájuk nyúlni?

Megoldás: Jelölje az egymástól független (exponenciális) munkaidőket: X_1, X_2, X_3, X_4, illetve X_5. Az első elromló gép munkaideje: $X_1^* := \min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$. Ennek eloszlása:

$$\begin{aligned} 1-F_{X_1^*}(x) &= \mathbb{P}(\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)\ge x) = \mathbb{P}(X_1\ge x, X_2\ge x, X_3\ge x, X_4\ge x, X_5\ge x) = \\ &= \mathbb{P}(X_1\ge x)\mathbb{P}(X_2\ge x)\mathbb{P}(X_3\ge x)\mathbb{P}(X_4\ge x)\mathbb{P}(X_5\ge x) = \exp(-5\times 1000x), \end{aligned}$$

ha $x>0$, egyébként 1. Előbb használtunk függetlenséget és azt, hogy az X_i'k azonos $1/1000$ paraméterű exponenciálisok voltak. Azaz az első elromló gép munkaideje X_1^* is exponenciális eloszlású $5/1000$ paraméterrel (200 óra várható értékkel). Második elromló gép munkaidejének (legyen ez X_2^*) eloszlása:

$$\begin{aligned} 1-F_{X_2^*}(x) &= \mathbb{P}(X_2^*\ge x) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy gép romlik el } (0,x)\text{-ben}) = \\ &= \binom{5}{0}\left(\exp(-x/1000)\right)^5 + \binom{5}{1}(1-\exp(-x/1000))\left(\exp(-x/1000)\right)^4. \end{aligned}$$

Ebből:

$$F_{X_2^*}(x) = 1+4\exp(-5x/1000)-5\exp(-4x/1000),$$

ha $x>0$ egyébként 0; ennek a derviáltja lesz a sűrűségfüggvény, amit közvetlenül is kiszámíthatunk, nevezetesen:

$$\begin{aligned} f_{X_2^*}(x)\,\mathrm{d}x &= \mathbb{P}(X_2^*\approx x) = \mathbb{P}(\text{pont 1 max. } x \text{ ideig él, } 1\ (x,x+\mathrm{d}x)\text{-ben romlik el, 3 min. } x+\mathrm{d}x \text{ ideig él}) = \\ &= \binom{5}{1}\left(1-\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)\right)\binom{4}{1}\frac{1}{1000}\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)\mathrm{d}x\binom{3}{3}\left(\exp\left(-\frac{x+\mathrm{d}x}{1000}\right)\right)^3 = \\ &= \frac{5!}{1!1!3!}\left(1-\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)\right)\frac{1}{1000}\exp\left(-\frac{4x}{1000}\right)\left(1-\frac{3\,\mathrm{d}x}{1000}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\mathrm{d}x$-szel osszunk le, majd tartsunk vele a 0-ba, így kapjuk, hogy

$$f_{X_2^*}(x) = \frac{5!}{1!1!3!}\frac{1}{1000}\exp\left(-\frac{4x}{1000}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)\right).$$

Az első két gép elromlási idejének együttes sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} &f_{(X_1^*,X_2^*)}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \mathbb{P}(X_1^*\approx x_1, X_2^*\approx x_2) = \mathbb{P}\,(\text{első elromló gép } (x_1,x_1+\mathrm{d}x_1)\text{-ben,} \\ &\text{a második } (x_2,x_2+\mathrm{d}x_2)\text{-ben hal meg, a maradék 3 pedig legalább } x_2+\mathrm{d}x_2 \text{ ideig él}) = \\ &= \binom{5}{1}\frac{1}{1000}\exp\left(-\frac{x_1}{1000}\right)\mathrm{d}x_1\binom{4}{1}\frac{1}{1000}\exp\left(-\frac{x_2}{1000}\right)\mathrm{d}x_2\binom{3}{3}\left(\exp\left(-\frac{x_2+\mathrm{d}x_2}{1000}\right)\right)^3 = \\ &= \frac{5!}{1!1!3!}\frac{1}{1000^2}\exp\left(-\frac{x_1+4x_2}{1000}\right)\left(1-\frac{3\mathrm{d}x_2}{1000}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \end{aligned}$$

ha $0\le x_1\le x_2<+\infty$; különben zérus. Osszunk le előbb $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$-vel, majd tartsunk velük 0-ba kapjuk a sűrűségfüggvényt. Vegyük észre, hogy persze X_1^* nem független X_2^*-tól, ami a fentiekből is látszik. Ellenőrizzük továbbá, hogy ennek az együttes sűrűségfüggvénynek a marginális sűrűségfüggvényei valóban a fent kiszámoltakkal egyeznek meg. Ebből az első két elromló gép összes működési idejének sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} &f_{X_1^*+X_2^*}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(X_1^*+X_2^*\approx x) = \int\limits_{x_2=0}^{+\infty} f_{(X_1^*,X_2^*)}(x-x_2,x_2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x_2 = \frac{20}{10^6}\int\limits_{x_2=x/2}^{x}\exp\left(-\frac{x-x_2+4x_2}{1000}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x_2 = \\ &= \frac{2}{10^5}\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)\frac{1000}{3}\left(\exp\left(-\frac{3x}{2000}\right)-\exp\left(-\frac{3x}{1000}\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{150}\exp\left(-\frac{4x}{1000}\right)\left(\exp\left(\frac{3x}{2000}\right)-1\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ha $x > 0$, egyébként 0.
Legyen X_3^* a harmadiknak elromló gép működési ideje. Az utolsó előtti kérdés ennek az eloszlására vonatkozik:

$$1 - F_{X_3^*}(x) = \mathbb{P}(X_3^* > x) = \mathbb{P}((0,x)\text{-ben legfeljebb 2 gép romlik el}) =$$
$$= \binom{5}{0}\left(\exp(-x/1000)\right)^5 + \binom{5}{1}(1-\exp(-x/1000))\left(\exp(-x/1000)\right)^4 + \binom{5}{2}(1-\exp(-x/1000))^2\left(\exp(-x/1000)\right)^3.$$

Ebből az eloszlásfüggvény:

$$F_{X_3^*}(x) = 1 - \exp(-5x/1000) - 5(1-\exp(-x/1000))\exp(-4x/1000) - 10(1-\exp(-x/1000))^2\exp(-3x/1000).$$

Ennek a sűrűségfüggvénye:

$$f_{X_3^*}(x) = \frac{3}{100}\exp(-5x/1000) - \frac{6}{100}\exp(-4x/1000) + \frac{3}{100}\exp(-3x/1000).$$

Végül meghatározzuk X_3^* várható értékét:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3^*) &= \int_{x=0}^{+\infty} x\left(\frac{3}{100}\exp(-5x/1000) - \frac{6}{100}\exp(-4x/1000) + \frac{3}{100}\exp(-3x/1000)\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{100}\frac{1000^2}{5^2} - \frac{6}{100}\frac{1000^2}{4^2} + \frac{3}{100}\frac{1000^2}{3^2} = 1200 - 3750 + 3333.3 = 783.3.\end{aligned}$$

21. Erika és Ervin randizni szeretnének este hatkor. Mindketten elég késősek: késett perceiknek száma egymástól független, exponenciális eloszlású, 30 perc várható értékkel. Bármikor is érkeznek meg egy 10 percet várnak a másikra. Mi annak a valószínűsége, hogy összejön a randi?

Megoldás: Jelölje Erika, illetve Ervin késett perceinek számát X, illetve Y; mindkettő exponenciális $1/30$ paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \le Y \le X+10) = \int_{x=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X \le Y \le X+10 \,|\, X=x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty}\mathbb{P}(x \le Y \le x+10) f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x=0}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{x}{30}\right) - \exp\left(-\frac{x+10}{30}\right)\right)\frac{1}{30}\exp\left(-\frac{x}{30}\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{2}(1-\exp(-1/3)) \approx 0.14,$$

ahol a teljes valószínűség tételét használtuk meg a függetlenséget.
E kettőből: $\mathbb{P}(\text{összejön a randi}) = \mathbb{P}(X \le Y \le X+10) + \mathbb{P}(Y \le X \le Y+10) = 2\mathbb{P}(X \le Y \le X+10) = 1 - \exp(-1/3) \approx 0.28$.

22. Erika és Ervin randizni szeretnének este hatkor. Mindkettejük késett perceinek száma egymástól független, exponenciális eloszlású, Erikának 40 perc, míg Ervinnek 10 perc várható értékkel. Bármikor is érkeznek meg Erika legfeljebb 5 percet vár, míg Ervin maximum 10 percig türelmes. Mi annak a valószínűsége, hogy összejön a randi?

Megoldás: Újfent jelölje Erika, illetve Ervin késett perceinek számát X, illetve Y; mindkettő exponenciális előbbi $1/40$-, utóbbi $1/10$ paraméterrel. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \le Y \le X+5) = \int_{x=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X \le Y \le X+10 \,|\, X=x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty}\mathbb{P}(x \le Y \le x+10) f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x=0}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{x}{40}\right) - \exp\left(-\frac{x+5}{40}\right)\right)\frac{1}{10}\exp\left(-\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{4}{5}(1-\exp(-1/8)) \approx 0.094,$$

$$\mathbb{P}(Y \le X \le Y+10) = \int_{y=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y \le X \le Y+10 \,|\, X=x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{+\infty}\mathbb{P}(y \le X \le y+10) f_Y(y)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{y=0}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{y}{10}\right) - \exp\left(-\frac{y+10}{10}\right)\right)\frac{1}{40}\exp\left(-\frac{y}{40}\right)\mathrm{d}y = \ldots = \frac{1}{5}(1-\exp(-1)) \approx 0.126,$$

Mindkét valószínűség kiszámításában használtuk a teljes valószínűség tételét valamint X, Y függetlenségét.
E kettőből: $\mathbb{P}(\text{összejön a randi}) = \mathbb{P}(X \le Y \le X+5) + \mathbb{P}(Y \le X \le Y+10) \approx 0.22$.

23. Erika és Ervin ismét randit beszélnek meg este hat órára. Mindketten elég késősek: késett perceiknek száma egymástól független, egyenletes eloszlású, legfeljebb azonban 30 percet késnek. Bármikor is érkeznek meg egy véletlen exponenciális időt várnak a másikra 10 perc várható értékkel. Mi annak a valószínűsége, hogy összejön a randi?

Megoldás: Először meghatározzuk, hogy mennyi a $p(z) := \mathbb{P}(X \le Y \le X+z)$ valószínűség minden $z \in \mathbb{R}^+$ rögzített számra, ahol X, Y független egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $(0,30)$ intervallumban. Nyilván ha $z \ge 30$, akkor $p(z) = \frac{1}{2}$ egyszerű szimmetria miatt. Ha $0 < z < 30$, akkor a $(0,30)\times(0,30)$ négyzeten belül – egyenletes eloszlás lévén – a kedvező terület nagysága: az $y_1(x) = x$, illetve az $y_2(x) = x + z$ (z rögzített) egyenesek által (négyzeten belül) közrezárt terület nagysága: $30^2/2 - (30-z)^2/2$. Tehát $p(z) = (30z - z^2/2)/30^2$, ha $0 < z < 30$ egyébként meg $1/2$, azaz ha Z mindentől független exponenciális eloszlású változó $1/10$ paraméterrel, akkor

$$\mathbb{P}(X \le Y \le X+Z) = \int_{z=0}^{+\infty} p(z)\frac{1}{10}\exp\left(-\frac{z}{10}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{10\times 30^2}\int_{z=0}^{30}\left(30z - \frac{z^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{z}{10}\right)\mathrm{d}z +$$
$$+\frac{1}{10}\int_{z=30}^{+\infty}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{10}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{300}\int_{z=0}^{30} z\exp\left(-\frac{z}{10}\right)\mathrm{d}z - \frac{1}{18000}\int_{z=0}^{30} z^2\exp\left(-\frac{z}{10}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{20}10\exp(-3) =$$
$$= \ldots = \frac{100 - 400\exp{-3}}{300} - \frac{2000 - 17000\exp(-3)}{18000} + \frac{\exp(-3)}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\exp(-3) \approx 0.23$$

Szerepek szimmetrikussága (és függetlenség) miatt: $\mathbb{P}(X \le Y \le X+Z) = \mathbb{P}(Y \le X \le Y+Z)$, vagyis $\mathbb{P}(\text{összejön a randi}) = 2\mathbb{P}(X \le Y \le X+Z) = 4/9 + 2\exp(-3)/9 \approx 0.46$.

24. Erika és Ervin még mindig randizni szeretnének, meg is beszélnek egy találkát újfent este hat órára. Erika azonban valamiért nagyon késős típus, késett perceinek száma egyenletes eloszlású, legfeljebb azonban 50 percet késik. Ervin, Erikától függetlenül, legfeljebb 10 percet késik, szintén egyenletesen. Bármikor is érkezik meg Ervin, roppant kitartó, ezért az ő véletlen várakozási ideje 20 perc várható értékű, míg Erika – ahogy jött úgy megy is – várhatóan csak 3 percet marad (mindkettőjüknek exponenciális óra van a zsebében). Mi az esélye annak, hogy összejön az áhított találka?

Megoldás: Az előző feladat megoldásához szükséges lépéseket követjük. Először meghatározzuk, hogy mennyi a $p(z) := \mathbb{P}(X \le Y \le X+z)$, illetve a $q(z) := \mathbb{P}(Y \le X \le Y+z)$ valószínűség minden $z \in \mathbb{R}^+$ rögzített számra, ahol X, Y független egyenletes eloszlású valószínűségi változók, előbbi $(0,50)$-en, utóbbi $(0,10)$-en.
Ha $z \ge 10$, akkor $p(z) = \mathbb{P}(X \le Y \le 10) = 50/500 = 1/10$, mivel ez egy háromszög területe per az összterület a $(0,50)\times(0,10)$ téglalapon. Ha pedig $0 \le z \le 10$, akkor – ugyancsak területek hányadából adódik a – $p(z) = (100/2 - (10-z)^2/2)/500 = z/50 - z^2/1000$.
Hasonlóan, ha $z \ge 50$, akkor $q(z) = 1 - p(z) = 9/10$, ha $0 \le z \le 40$, akkor $q(z) = z/50$, egyébként pedig – ha $40 \le z \le 50$, akkor – $p(z) = 1 - (50 + (50-z)^2/2)/500 = -8/5 + z/10 - z^2/1000$. Most legyen Z_1, Z_2 exponenciális valószínűségi változók, előbbi $1/3$, utóbbi $1/20$ paraméterrel. Az előbbiekből adódik, hogy

$$\mathbb{P}(X \le Y \le X+Z_1) = \int_{z=0}^{+\infty} p(z)\frac{1}{3}\exp\left(-\frac{z}{3}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int_{z=0}^{10}\left(\frac{z}{50} - \frac{z^2}{1000}\right)\exp\left(-\frac{z}{3}\right)\,\mathrm{d}z +$$
$$+\frac{1}{3}\int_{z=10}^{+\infty}\frac{1}{10}\exp\left(-\frac{z}{3}\right)\,\mathrm{d}z = \ldots = \frac{1}{500}(21 - 41\exp(-10/3)) + \frac{1}{10}\exp(-10/3) \approx 0.0426.$$

Valamint:

$$\mathbb{P}(Y \le X \le Y+Z_2) = \int_{z=0}^{+\infty} q(z)\frac{1}{20}\exp\left(-\frac{z}{20}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{20}\int_{z=0}^{40}\frac{z}{50}\exp\left(-\frac{z}{20}\right)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{20}\int_{z=50}^{+\infty}\frac{9}{10}\exp\left(-\frac{z}{20}\right)\,\mathrm{d}z +$$
$$+\frac{1}{20}\int_{z=40}^{50}\left(-\frac{8}{5} + \frac{z}{10} - \frac{z^2}{1000}\right)\exp\left(-\frac{z}{20}\right)\,\mathrm{d}z = \ldots =$$
$$= \frac{2}{5}(1 - 3\exp(-2)) + \frac{9}{10}\exp(-5/2) + \frac{1}{20}(-2\exp(-5/2) + 8\exp(-2)) \approx 0.3574.$$

Tehát: $\mathbb{P}(\text{összejön a randi}) = \mathbb{P}(X \le Y \le X+Z_1) + \mathbb{P}(Y \le X \le Y+Z_2) = 0.0426 + 0.3574 = 0.4$.

25. Béla és Jóska is munkanapokon busszal jár dolgozni. A két járat – melyre Bélának, illetve Jóskának kell szállnia – egymástól függetlenül jár. Béla esetében átlagosan 2 percet kell várni, míg Jóska általában 3 percet vár a busz érkezésére. A furcsa csillagállásoknak is köszönhetően ők mindig egyszerre érkeznek meg reggel a buszmegállóba. Mi az esélye, hogy Jóska előbb száll fel a buszra, mint Béla? Mi a valószínűsége annak, hogy ugyanannyit vártak a buszra? A két barát hétvégente is szokott buszozni, akkor azonban Béla 10 percet, míg Jóska csak 5 percet vár átlagosan. Béla és Jóska is a hét összes napján szokott utazni. Mi az esély arra, hogy egy tetszőleges napon Béla kevesebbet vár a buszra, mint Jóska?

Megoldás: A busz érkezések között eltelt időt exponenciális valószínűségi változókkal modellezzük. Munkanapokon (hétvégén) Béla buszának paramétere $1/2$ $(1/10)$, Jóska esetében ez $1/3$ $(1/5)$, percekben számolva. X (Y) jelöli azt az időt amennyit Bélának (Jóskának) kellett várni az első buszra. Ekkor a keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > X, \text{munkanap}) &= \iint\limits_{y>x} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=x}^{+\infty}\frac{1}{2}\exp(-x/2)\frac{1}{3}\exp(-y/3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{+\infty}\exp(-x/2)\exp(-x/3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{+\infty}\exp(-x/2)\exp(-x/3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Az, hogy ugyanannyit vártak 0 valószínűségű, mivel folytonosak a valószínűségi változóink.

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{5}{7}\mathbb{P}(X < Y, \text{, munkanap}) + \frac{2}{7}\mathbb{P}(X < Y, \text{, hétvége}) = \frac{5}{7}\frac{14}{15} + \frac{2}{7}\frac{2}{3} = \frac{18}{21},$$

mivel:

$$\mathbb{P}(X < Y, \text{hétvége}) = \ldots = \int_{y=0}^{+\infty}\int_{x=y}^{+\infty}\frac{1}{10}\exp(-x/10)\frac{1}{5}\exp(-y/5)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{5}\int_{y=0}^{+\infty}\exp(-y/10)\exp(-y/5)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$

26. Egy telefonközpontba véletlen időközönként érkeznek be a hívások. Azt tapasztalják, hogy az operátorok egy órán belül átlagosan 12 hívást regisztrálnak. Ha tudjuk, hogy fél órán belül 4 hívást kaptak be, mi az eloszlása az első bejövő hívásnak? És a másodiknak? Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt is! Mi az együttes sűrűségfüggvénye a harmadik és negyedik bejövő hívás időpontjának?

Megoldás: Két hívás között eltelt idő exponenciális (λ paraméterrel), és ezek egymástól függetlenek. Ezért az egy órán belül bejövő hívások száma Poisson eloszlású, mivel az átlag – egy órára vonatkozóan – 12, ezért $\lambda = 12$. Jelölje X_i az $i-1$. és i. hívás között eltelt időt, ezek tehát független exponenciálisok $1/12$ várható értékkel, azaz az első kérdésre a válasz:

$$f_{X_1\,|\,X_1+X_2}(x\,|\,y) = \frac{f_{X_1+X_2\,|\,X_1}(y\,|\,x)f_{X_1}(x)}{f_{X_1+X_2}(y)} = \frac{f_{X_2}(y-x)f_{X_1}(x)}{f_{X_1+X_2}(y)} = \frac{\lambda\exp(-\lambda(y-x))\lambda\exp(-\lambda x)}{\frac{\lambda^2 y}{1!}\exp(-\lambda y)} = \frac{1}{y}$$

ha $0 \leq x \leq y$, egyébként 0. Tehát $X_1 \mid X_1+X_2$ feltételes eloszlás egyenletes! Hasonlóan számolható ki, hogy a második hívás feltételes eloszlása is egyenletes, az előbbi levezetésben az 1-es indexeket 2-esekre kell cserélni, de a sűrűségfüggvények képletei nem változnak.
A harmadik és negyedik bejövő hívás időpontjának együttes eloszlása:

$$f_{(X_1+X_2+X_3,X_1+X_2+X_3+X_4)}(x,y) = f_{X_1+X_2+X_3+X_4 \mid X_1+X_2+X_3}(y \mid x) f_{(X_1+X_2+X_3)}(x) =$$
$$= f_{X_4}(y-x) f_{(X_1+X_2+X_3)}(x) = \lambda \exp(-\lambda(y-x)) \frac{\lambda^3 x^2}{2!} \exp(-\lambda x) = \frac{x^2\lambda^4}{2} \exp(-\lambda y),$$

ha $y \geq x \geq 0$; egyébként 0, mivel X_i'k függetlenek voltak, összegük meg gamma eloszlású.

27. Egy A4-et hallgató villamosmérnök hallgató szeretné megoldani az összes kiadott házi feladatot, azaz mind a hatot. Akármelyik is kerül elsőként a kezébe azt (egy véletlen) Z_1 idő alatt oldja meg. Azonban, ahogy időben halad előre a következő feladatra már csak $\sqrt{Z_2}$ idő kell, a harmadikra $\sqrt[3]{Z_3}$, végül $\sqrt[6]{Z_6}$ idő alatt oldja meg az utolsó feladatot, ahol $Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 1 (óra) várható értékkel. Mi az együttes eloszlása a második és harmadik feladat megoldásához kellő időnek? Mennyi az első két feladat megoldásához szükséges összes idő eloszlása? Adjuk meg a sűrűségfüggvényt! Várhatóan hány perc múlva fog végezni az első két feladattal? Tudjuk, hogy 25 óra alatt oldotta meg az első két feladatot, mi az elsőként megoldott feladat eloszlása?
Megjegyzés: $\sqrt[i]{Z_i}$ úgynevezett öregedő (Weibull) eloszlású, azaz minél többet gondolkodik, annál kevesebb idő kell már ahhoz, hogy megoldja az adott feladatot.

Megoldás: Meghatározzuk egy $\sqrt[i]{Z_i}$ eloszlását, mivel Z_i nemnegatív valószínűségi változó ezért az előbbi transzformáltjai is mind azok (és nem lesz gondunk a hatvány invertálásával). Ha $z>0$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[i]{Z_i} > z) = \mathbb{P}(Z_i > z^i) = \exp(-z^i)$, mert Z_i'k exponenciálisak voltak. Ebből az eloszlásfüggvény: $F_{\sqrt[i]{Z_i}}(z) = 1-\exp(-z^i)$, ha $z>0$; egyébként 0. A sűrűségfüggvény pedig: $f_{\sqrt[i]{Z_i}}(z) = iz^{i-1}\exp(-z^i)$, ha $z>0$; egyébként 0 ($i = 1,2,\ldots,6$). Mivel Z_i'k függetlenek voltak, ezért $\sqrt[i]{Z_i}$'k is függetlenek, azaz együttes sűrűségfüggvényük a megfelelő sűrűségfüggvények szorzata lesz.
Az első két feladat megoldásához szükséges összidő sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned}
f_{Z_1+\sqrt{Z_2}}(x)\,\mathrm{d}x &= \mathbb{P}(Z_1+\sqrt{Z_2} \approx x) = \int_{z=0}^{+\infty} f_{(Z_1,\sqrt{Z_2})}(x-z,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{x} \exp(-(x-z))\,2z\exp(-z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \\
&= \exp(-x+1/4)\int_{z=0}^{x}(2z-1+1)\exp(-(z-1/2)^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \\
&= \exp(-x+1/4)\left[\exp(-1/4)-\exp(-(x-1/2)^2)+\int_{z=0}^{x}\exp(-(z-1/2)^2)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x = \\
&= \exp(-x)\left\{1-\exp(-x^2+x)+\exp(1/4)\sqrt{\pi}[\Phi(\sqrt{2}x-\sqrt{2}/2)-\Phi(-\sqrt{2}/2)]\right\}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

amennyiben $x>0$, egyébként pedig 0.
$\sqrt{Z_2}$ várható értékét a 9. feladatsorban számoljuk ki, lásd hozzá a 9. feladatot: $\mathbb{E}(Z_1+\sqrt{Z_2}) = 1+\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 1.89$.
Percekben számolunk, ekkor, ha $0 \leq z \leq 25$:

$$\begin{aligned}
f_{Z_1 \mid Z_1+\sqrt{Z_2}}(z \mid 25) &= \frac{f_{(Z_1,Z_1+\sqrt{Z_2})}(z,25)}{f_{Z_+\sqrt{Z_2}}(25)} = \frac{f_{Z_1+\sqrt{Z_2} \mid Z_1}(25 \mid z) f_{Z_1}(z)}{f_{Z_+\sqrt{Z_2}}(25)} = \\
&= \frac{1-\exp(-(25-z)^2+25-z)+\exp(1/4)\sqrt{\pi}[\Phi(\sqrt{2}(25-z)-\sqrt{2}/2)-\Phi(-\sqrt{2}/2)]}{1-\exp(-600)+\exp(1/4)\sqrt{\pi}[\Phi(25\sqrt{2}-\sqrt{2}/2)-\Phi(-\sqrt{2}/2)]} = \\
&= \frac{1}{2.73}\left(1-\exp(-z^2+49z-600)+2.28\,[\Phi(34.65-1.41z)-0.24]\right),
\end{aligned}$$

mert a függetlenség következtében: $f_{Z_1+\sqrt{Z_2} \mid Z_1}(x \mid z) = f_{\sqrt{Z_2}}(x-z)$, ha $x \geq z$, egyébként 0.

28. Egy általános biztosítási cégnél minden biztosítottnak van úgynevezett baleseti paramétere, ez legyen $\lambda > 0$. Egy évben egy ilyen egyén baleseteinek száma λ várható értékű Poisson eloszlást követ. A cégnél azt a feltevést teszik meg, hogy egy újonnan belépett egyén baleseti paramétere gamma eloszlású (k,α) paraméterrel. Ha ennek az újonnan biztosított egyénnek 5 balesete volt az első évben, mi a feltételes sűrűsége a baleseti paraméterének? Határozzuk meg az első éves baleseteinek várható számát!

Megoldás: Legyen Λ gamma eloszlású (k,α) paraméterrel ($k \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$), majd legyen X Poisson eloszlású Λ paraméterrel, ezalatt azt értjük, hogy $f_{X \mid \Lambda}(n \mid \lambda) = \mathbb{P}(X=n \mid \Lambda=\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda)$. Használjuk a folytonos Bayes-formulát:

$$\begin{aligned}
f_{\Lambda \mid X}(\lambda \mid 5) &= \frac{f_{X \mid \Lambda}(5 \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda)}{\int_{z=0}^{+\infty} f_{X \mid \Lambda}(5 \mid z) f_\Lambda(z)\,\mathrm{d}z} = \frac{\frac{\lambda^5}{5!}\exp(-\lambda)\frac{\alpha^k\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\exp(-\alpha\lambda)}{\int_{z=0}^{+\infty}\frac{z^5}{5!}\exp(-z)\frac{\alpha^k z^{k-1}}{(k-1)!}\exp(-\alpha z)\,\mathrm{d}z} = \\
&= \frac{\lambda^{k+4}\exp(-(1+\alpha)\lambda)}{\frac{(k+4)!}{(1+\alpha)^{k+5}}\int_{z=0}^{+\infty}(1+\alpha)^{k+5}\frac{z^{k+4}}{(k+4)!}\exp(-(1+\alpha)z)\,\mathrm{d}z} = \frac{(1+\alpha)^{k+5}\lambda^{k+4}\exp(-(1+\alpha)\lambda)}{(k+4)!}
\end{aligned}$$

azaz a $\Lambda \mid X=5$ feltételes eloszlás is gamma eloszlású, méghozzá $(k+5, 1+\alpha)$ paraméterpárral.
Az első éves baleseteinek száma: $X \mid \Lambda = \lambda$ feltételes eloszlás várható értéke λ és Λ várható értéke k/α, azaz $\mathbb{E}X = k/\alpha$.

Mindez analitikusan kiszámolva:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \int_{\lambda=0}^{+\infty} f_{X\,|\,\Lambda}(n\,|\,\lambda) f_\Lambda(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{(n+k-2)!}{n!(k-1)!} \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{n+k-1}} \int_{\lambda=0}^{+\infty} \frac{(1+\alpha)^{n+k-1}\lambda^{n+k-1}}{(n+k-2)!} \exp(-(1+\alpha)\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \\
&= \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+1}(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\cdots(n+k-1) \frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}} = \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+1}(k-1)!} \left(\frac{x^{k-1}-1+1}{1-x} \right)^{(k)} \Bigg|_{x=\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{k}{\alpha}.
\end{aligned}$$