Sztochasztika vizsga
2011. január 3.
Felsőbb matematika tárgy, Villamosmérnök MSc

1. (2 pont) Definiálja a lineáris szűrő fogalmát. Mutassa meg, hogy hat a kiindulási folyamat spektrumára a szűrő.

2. (5 pont) Egy új fajta gyógyszert tesztelnek embereken. A következő eredmények a tesztben részvevő, egyik kisebb centrumból valók. A hatásosság eldöntésére egy 6 betegből álló csoport placebót kapott, az igazi gyógyszert 8-an kapták meg. A tesztelésnél azt vizsgálják, hány hónap alatt lesz tünetmentes a páciens.

1. táblázat. Placebo használatával az eredmények

beteg	1	2	3	4	5	6
gyógyulás hossza	2.1	1.2	1.4	2.2	0.9	1.7

2. táblázat. Az új gyógyszer használatával az eredmények

beteg	1	2	3	4	5	6	7	8
gyógyulás hossza	1.2	2.2	1.1	1.8	0.5	0.9	1.6	1.7

Azt szeretnénk eldönteni, hogy a gyógyszer hatása szignifikánsnak tekinthető-e 95%-os szinten. Ehhez

(a) Írjuk fel a hipotéziseket.

(b) Határozzuk meg a próba nevét és képletét, amivel döntetnénk. Nem kell kiszámolni az értéket, viszont minden szereplő mennyiségnek adjuk meg a definícióját.

(c) Legyen a próba statisztika értéke T. A táblázatok használatával határozzuk meg az elfogadási tartományt, azaz azt a tartományt, amelybe ha T beleseik, akkor 95%-os szinten elfogadjuk a nullhipotézist.

3. (5 pont) Legyen $X_1, \ldots, X_n$ egy független azonos eloszlású minta az

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

eloszlásból, ahol $\theta \in (0, \infty)$. Adjunk maximum likelihood becslést a θ paraméterre.

4. (13 pont) Definiáljunk egy hat állapotú ($\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) folytonos idejű Markov-láncot. A beágyazott Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixa

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 1/2 & 1/2 \\ & 0 & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right].$$

(az állapot sorrend 1,2,3,4,5,6 felülről lefelé, illetve balról jobbra). Az egyes állapotokban a tartózkodási idő hosszának paramétere: 4,4,4,4,8,8 sorrendben az 1,2,3,4,5,6 állapotokban.

Jelöljük $X(t)$-vel a Markov-lánc állapotát t időben.

(a) Osztályozzuk az állapotokat, és ha vannak, határozzuk meg a beágyazott Markov-lánc osztályait (amelyek ugye megegyeznek a folytonos Markov-lánc osztályaival). Hosszútávon melyik osztályban fog tartózkodni a Markov-lánc?

(b) Határozzuk meg az ugrási ráta mátrixot, Λ-t és $(X(t), t \geq 0)$ gráfreprezentációját.

(c) Határozzuk meg $(X(t),\ t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.

(d) Megközelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy a kezdés után 3000 időegységgel a 6-os állapotba kerül a folyamat?

(e) Hosszútávon az idő hány százalékában tartózkodik az egyes állapotokban?

(f) Az i állapotban való tartózkodás költsége egy időegység alatt i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Határozzuk meg a Markov-lánc lépéseinek hosszútávú átlagos költségét egy időegységre nézve.