

Alapműveletek

- (1) Legyen $z_1 := 3 - i$ és $z_2 := 2i + 5$. Végezzük el az alábbi műveleteket, és ábrázoljuk az eredményt a komplex számsíkon:

$$\overline{z_1}; \quad z_1 + z_2; \quad z_1 z_2; \quad \frac{1}{z_1}; \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

- (2) Hozza algebrai alakra a $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$ törtet!

- (3) Oldja meg a következő egyenleteket:

(a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 + i - \frac{1}{x+iy}$

(b) $(3 - 2i)(x + 2iy) = x + 2i + 1$

Trigonometrikus és exponenciális alak

- (1) (a) Hozza algebrai alakra a következő komplex számokat:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad 3e^{-i\frac{\pi}{4}}; \quad e^{3i\pi}; \quad -2e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

- (b) Hozza exponenciális alakra a következő komplex számokat:

$$1 + i; \quad \sqrt{3} - i; \quad 2\sqrt{3}i - 2.$$

- (2) Használja a komplex számok exponenciális alakját az alábbi műveletek elvégzésére:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad \frac{1}{1+i}; \quad \frac{1}{i-\sqrt{3}}; \quad \frac{1+i}{1-i}.$$

- (3) A trigonometrikus és az exponenciális alak közötti összefüggés szerint $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, amiből

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{és} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Használja fel ezt az alábbi trigonometrikus azonosságok bizonyítására:

(a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

(b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

(c) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

(d) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$.

Hatványozás, gyökvonás

(1) Adja meg a következő komplex számok algebrai alakját:

$$(1+i)^{10}; \quad (1-i)^{10}; \quad \sqrt{1-i}; \quad \sqrt[3]{-i}; \quad \sqrt[4]{-i}.$$

(2) Oldja meg a következő egyenleteket:

(a) $z^7 = z^3$;

(b) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

Komplex számok és geometria

(1) Milyen geometriai műveleteknek felelnek meg az alábbi komplex transzformációk?

$$z \mapsto -z; \quad z \mapsto \bar{z}; \quad z \mapsto z + w; \quad z \mapsto zw; \quad z \mapsto \frac{z}{w}; \quad z \mapsto \frac{1}{z},$$

ahol w egy rögzített nemnulla komplex szám.

(2) A síknak mely halmazait határozzák meg az alábbi formulák?

(a) $|z| < 2$; $|z - 1| < 2$; $|2z - 1| < 2$; $1 < |z - i + 2| < 2$;

(b) $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$; $|z - 1| > |z - i|$; $|z| > |z - i + i|$;

(c) $\Re z^2 = 1$; $\Im z^2 = 1$; $\Re z^2 = 0$; $\Im z^2 = 0$.