Haladó lineáris algebra **1. zh** **2019. Március 26.**

1. Definiálja az ortogonális mátrix fogalmát! Ortogonális-e az alábbi mátrix? Válaszát indokolja! (5 pont)

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Definiálja a normált tér fogalmát! Mit értünk egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor p-normáján? Határozzuk meg az alábbi vektor 1-es, 2-es és ∞-normáját! (5 pont)

$$x = (3, -1, 4, 1)^T.$$

3. Tekintsük a legfeljebb másodfokú polinomok $\mathcal{P}^{(2)}$ vektorterét.

   (a) Mutassuk meg, hogy az első három Laguerre-polinom, azaz $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = 2 - 4t + t^2$ lineárisan függetlenek $\mathcal{P}^{(2)}$-ben! (2 pont)

   (b) Állítsuk elő a $q(t) = 3t^2 + 5t + 3$ polinomot a $p_0(t)$, $p_1(t)$ és a $p_2(t)$ lineáris kombinációjaként! (3 pont)

   (c) Értelmezzük a $p, q \in \mathcal{P}^{(2)}$ polinomok belső szorzatát a következőképpen: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Adjuk meg a $p_0(t)$ és a $p_1(t)$ polinomok által bezárt szöget erre a belső szorzatra vonatkozóan! (3 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi A mátrix LU-felbontását, majd oldjuk meg ennek segítségével az $Ax = b$ egyenletrendszert! (8 pont)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Számoljuk ki a következő A mátrix kondíciószámát a 2-es norma által indukált mátrixnormában! (8 pont)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval konstruáljunk ortonormált bázist a következő vektorokból: (8 pont)

$$w_1 = (1, 2, 3)^T, \quad w_2 = (4, 5, 0)^T, \quad w_3 = (2, 3, -1)^T.$$

7. Igazoljuk, hogy ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tetszőleges reguláris mátrix, akkor $cond_1(A) = cond_\infty(A)$. (8 pont)