Villamosmérnök A3 (2017 ősz) — 2. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y_1' + y_2 = e^t$, $y_1 + y_2' = e^{-t}$ differenciál-egyenletrendszert!

Megoldásvázlat. A homogén általános megoldása: Az egyenletrendszer mátrixa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; ennek sajátértékei: $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ gyökei, azaz ± 1. A -1-hez tartozó egy sajátvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, az 1-hez tartozó egy sajátvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tehát a megoldás $\mathbf{y}_{ha} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Inhomogén partikuláris megoldása állandók variálásával: elég $\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$-t megoldani $\mathbf{c}'$-re, és akkor az abból kapott $\mathbf{c}$-re $\mathbf{y}_{ip} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^t & e^t \\ e^{-t} & -e^t & e^{-t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^t & e^t \\ 0 & -2e^t & e^{-t} - e^t \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} e^{-t} & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ 0 & e^t & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{array}\right)$$

azaz $c_1' = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)$ és $c_2' = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$, amiből $c_1 = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{t}{2}$ és $c_2 = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2}$. Vagyis

$$\mathbf{y}_{ip} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{t}{2} \\ \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^t + \frac{t}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t \\ \frac{1}{4}e^t + \frac{t}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{t}{2}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}+t)\operatorname{ch}(t) \\ (\frac{1}{2}-t)\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix}$$

Vagyis

$$\mathbf{y}_{ia} = \mathbf{y}_{ha} + \mathbf{y}_{ip} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^t \\ c_1e^{-t} - c_2e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}+t)\operatorname{ch}(t) \\ (\frac{1}{2}-t)\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^t + (\frac{1}{2}+t)\operatorname{ch}(t) \\ c_1e^{-t} - c_2e^t + (\frac{1}{2}-t)\operatorname{sh}(t) \end{pmatrix}$$

2. $\int_L v\, dr = ?$, ha $v(x,y) = (2x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ és L az $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le y\}$ tartomány pozitívan irányított határa.

Megoldásvázlat. Stokes-tétellel: $\operatorname{rot} v = 2(x + y)$, tehát

$$\int_L v\, dr = \iint_T 2(x+y)\, dV = \int_0^R \int_0^\pi 2r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi\, dr$$
$$= \int_0^R 2r^2 \big[\sin\varphi - \cos\varphi\big]_0^\pi\, dr = \int_0^R 4r^2\, dr = \big[\frac{4}{3}r^3\big]_0^R = \frac{4}{3}R^3.$$

VAGY a vonalintegrál definíciójából: A megfelelően irányított félkör (L_1) egyenlete $r(t) = R(\cos t, \sin t)$, tehát $\dot r(t) = R(-\sin t, \cos t)$, és így

$$\int_{L_1} v\, dr = \int_0^\pi R^2(2\cos^2 t - \sin^2 t, 1) R(-\sin t, \cos t)\, dt$$
$$= R^3 \int_0^\pi -2\cos^2 t \sin t + \sin^3 t + \cos t\, dt = R^3 \int_0^\pi (-2\cos^2 t + \sin^2 t)\sin t + \cos t\, dt$$
$$= R^3 \int_0^\pi (1 - 3\cos^2 t)\sin t + \cos t\, dt = R^3 \int_0^\pi \sin t - 3\cos^2 t \sin t + \cos t\, dt$$
$$= R^3 \big[-\cos t + \cos^3 t + \sin t\big]_0^\pi = 0,$$

a megfelelően irányított átmérő (L_2) egyenlete $r(t) = t \in [-R, R]$, $\dot r(t) = 1$, és így

$$\int_{L_2} v\, dr = \int_{-R}^R (2t^2, t^2)(1, 0)\, dt = \int_{-R}^R 2t^2\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_{-R}^R = \frac{4}{3}R^3.$$

Vagyis $\int_L v\, dr = \int_{L_1} v\, dr + \int_{L_2} v\, dr = \frac{4}{3}R^3$.

3. Legyen H az R sugarú, m magasságú, z tengelyű, kifelé irányított hengerpalást, melynek alapja az xy síkban van. Számítsa ki a $v(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját H-n!

Megoldásvázlat. A hengerpalást egyenlete: $r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,m]$; $r_u \times r_v = (R\cos u, R\sin u, 0)$. Így

$$\int_H v\, df = \int_0^{2\pi}\int_0^m (R(\cos u - \sin u), R(\cos u + \sin u), v)(R\cos u, R\sin u, 0)\, dv\, du$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^m R^2\, dv\, du = 2R^2\pi m.$$

VAGY: A felületi egységnormális $n = r/|r| = (\cos u, \sin u, 0)$; $v_n = v \cdot n = (R(\cos u - \sin u), R(\cos u + \sin u), v)(\cos u, \sin u, 0) = R$, ezért

$$\int_H v\, df = \int_H v_n\, |df| = \int_H R\, |df| = R|H| = 2R^2\pi m.$$

VAGY: Alkalmazhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt a lezárt felületre (H^+), csak $\int\int_V \operatorname{div} v\, dV = 3|V| = 3R^2\pi m$-ből ki kell vonni v-nek az alaplapon és a fedőlapon (K) vett felületi integrálját. Az előbbi 0, mert az integrandus $\perp$ a normálisra ~~az xy síkban 0~~; K-n pedig $R^2\pi m$, mert a felületi egységnormális $n = k = (0,0,1)$ ezért $v_n = vn = m$, következésképp

$$\int_K v\, df = \int_K v_n\, |df| = \int_K m\, |df| = m|K| = R^2\pi m.$$

4. (a) A sík mely részhalmazán létezik potenciálfüggénye a $v(x,y) = (x^3 + y^3, 3xy^2)$ vektorfüggvénynek? (b) Határozza meg v egy potenciálfüggvényét, ahol az létezik!

Megoldásvázlat. $\operatorname{rot} v = \frac{\partial}{\partial x} 3xy^2 - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3) = 3y^2 - 3y^2 = 0$, tehát az egész síkon van potenciál.

Ha u a potenciál, akkor $u_x = x^3 + y^3$, $u_y = 3xy^2$ tehát $u = \int x^3 + y^3\, dx = x^4/4 + xy^3 + c(y)$ azaz $3xy^2 = u_y = 3xy^2 + c'(y)$, vagyis $c'(y) = 0$, és így $c(y) = c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Vagyis $u(x,y) = x^4/4 + xy^3 + c$.

5. (a) Definiálja a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvénynek az $F : r(u,v)$, $(u,v) \in A$ felületen vett *felszín szerinti* integrálját!
(b) Legyen $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deriválható függvény; létezik-e olyan $w = (w_1, w_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény, amelyre $\operatorname{rot} w = (\operatorname{rot} v)_3$?
(c) Igazak-e következő állítások a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mindenütt deriválható vektorfüggvényre? (c1) Ha v konstans, akkor $\operatorname{div} v = 0$ (c2) Ha $\operatorname{div} v = 0$, akkor v konstans.

Megoldásvázlat. (a) $\int_F v\, |df| = \int_A v(r(u,v))|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\, du\, dv$.
(b) Igen, $w_1 = v_1$ és $w_2 = v_2$.
(c1) Igen, mert akkor v deriváltoperátora a 0 lineáris operátor, és annak a skalárinvariánsa 0.
(c2) Nem, pl. $v(x,y,x) = (yz, xz, xy)$.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy egy elsőrendű, homogén, függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós teret alkotnak!

Megoldásvázlat. Legyen y_1 és y_2 az $y' + f(x)y = 0$ két megoldása. Akkor

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2} = \frac{-f(x)y_1y_2 + f(x)y_1y_2}{y_2^2} = 0,$$

azaz $\frac{y_1}{y_2}$ konstans.