Jelek és Rendszerek I.

Házi feladat segédlet

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dokumentum három különböző házifeladat típus részletes megoldását taglalja. A feladatokhoz Maple vagy MATLAB szoftvert alkalmaztam, de természetesen ettől függetlenül más programokkal is teljesértékűen megoldható minden feladat. A dokumentum mellett található állományok a házifeladatok megoldásában és ellenőrzésében segítenek.

Mint minden dokumentumban, ebben is előfordulhat hiba. Ezekért felelőséget nem tudok vállalni, viszont a dokumentum forrása megtalálható a csatolmányok között.

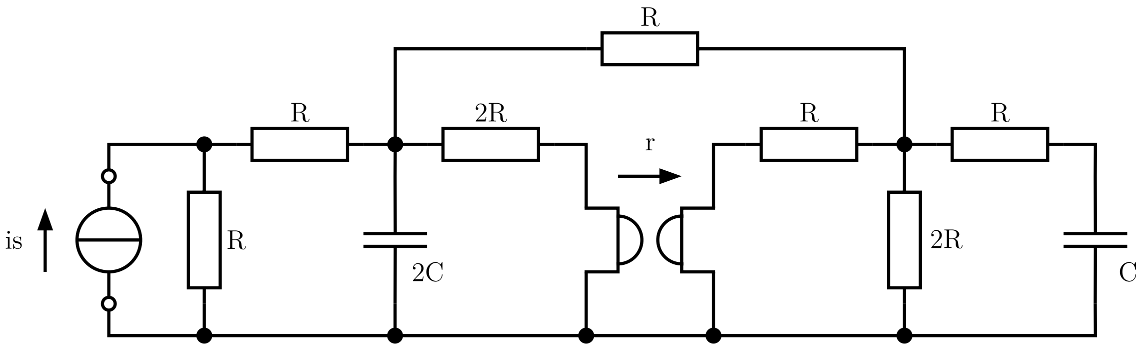
1.1. Néhány szó a Maple szoftverről

Nem igazán említik meg az egyetem alatt, pedig nagyon hasznos kis szoftver. Ez egy szimbolikus megoldásokra kifejlesztett matematikai megoldó szoftver. Hasonlít a WolframAlphához, viszont ez egyrészt nem netes, hanem PC-re települő alkalmazás, másrészről nagyon pofás dokumentáció készíthető a matematikai megoldások során (gyakorlatilag egy kis rajzoló programmal kiegészítve a J&R 1-2 HF-k megoldhatók benne nyomtatásra készen).

De nem is ezért volt számomra hasznos, hanem mert jó ellenőrzést ad integráláshoz és deriváláshoz. Ha nem voltál penge matekból, akkor minden félévben meg kell tanulni újra integrálni és deriválni, amiben segítséget nyújt, mivel a feladatok megoldása után tudod ellenőrizni a munkád. De ezen túl segítséget nyújt minden olyan tantárgyra készülés során, amiben jelentős matematikai munka van. Mivel szimbolikus megoldó, így egy-egy kifejezést akár parametrikusan is tudsz ábrázolni. Ha valakit érdekel, hogy hogyan néz ki különböző paraméterek mellett egy kádgörbe (elektronikai technológia), egy rezgőkör impedanciája (J&R 1) vagy egy hullámegyenlet megoldása (EMT), akkor érdemes megtanulni a használatát.

Persze azért nehogy elfelejtsük a MATLAB-ot se! Az egész egyetemen el fog kísérni minket a MATLAB, így érdemes minél hamarabb megbarátkozni vele, hogy a végére ne emiatt bukjunk egy Szabtechet (ötödik félév IIT), vagy egy méréselméletet (MSC).

2. Első minta

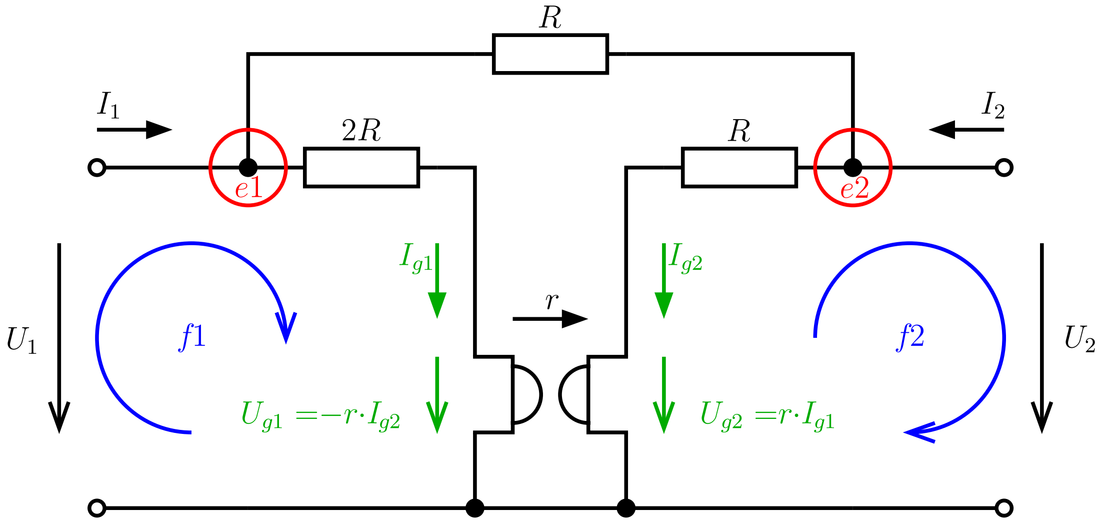


2.1. ábra. Első mintafeladat kapcsolási rajza

R	C	r	ω	T	A_0
$0,5\,k\Omega$	$0.8\,\mu F$	$160\,\Omega$	$1/2 \cdot RC$	$12 \cdot RC$	$15\,mA$

(2.1)

2.1. Kétkapu vizsgálata



2.2. ábra. Szaggatott vonallal határolt kétkapu

2.1.1. Karakterisztika meghatározása

Feladat szövege: *Határozza meg a szaggatott vonallal határolt kétkapu 3 lehetséges karakterisztikáját! (Részesítse előnyben az R, H, A karakterisztikákat!)*

Az ábrán (2.2.ábra 4.oldal) látható kétkapura két egyenletet kell kapnunk, amiben csak I_1, I_2, U_1 és U_2 szerepelhet ismeretlen változóként. A megoldás során bevezettem további négy változót, melyek a girátor működését írják le (I_{g1}, I_{g2}, U_{g1} és U_{g2}). Ennek megfelelően a két girátor egyenlet mellé további négy egyenlet szükséges.

Egyenleteink:

$$
\begin{aligned}
&\text{Girátor:} && \\
&& U_{g1} &= -r \cdot I_{g2} && (2.2)\\
&& U_{g2} &= r \cdot I_{g1} && (2.3)\\
&\text{Hurkok (f1 és f2):} && \\
&& U_1 &= U_{g1} + I_{g1} \cdot 2 \cdot R && (2.4)\\
&& U_2 &= U_{g2} + I_{g2} \cdot R && (2.5)\\
&\text{Csomópontok (e1 és e2):} && \\
&& I_1 &= \frac{U_1 - U_2}{R} + \frac{U_1 - U_{g1}}{2 \cdot R} && (2.6)\\
&& I_2 &= \frac{U_2 - U_1}{R} + \frac{U_2 - U_{g2}}{R} && (2.7)
\end{aligned}
$$

Megjegyzés Az első feladatnak ez a neheze. Mikor én csináltam a tantárgyat mágiának találtam, de nem egy nehéz feladatról van szó. Általában egy jó megoldás az, ha a belső kétpólust (ha van) felparaméterezzük (áramok és feszültségek). Ezzel van két egyenletünk és négy ismeretlenünk. Ezek után a további négy egyenlet általában két csomóponti és két hurok egyenlet. Amivel be lehet kavarni ebbe a sémába:

- nincs belső kétpólus – ilyenkor általában egyszerűbb a feladat. A lényeg, hogy úgy írjuk fel a csomóponti és hurok egyenleteinket, hogy minden komponens kapcsolat benne legyen (ha nem alkalmazunk egy kis gráfelméleti tudást, akkor ez egy kicsit mágikus).
- nincs a belső kétpólusban visszacsatolás (a felső R ellenállás, ami összekapcsolja a bemenetet a kimenettel) – ez általában nem okoz problémát, ilyenkor is érdemes a kimeneti és bemeneti pontokra felírni egy-egy csomóponti egyenletet (persze, ha van nem triviális csomópont).
- nincs közös potenciálon a bemenet és a kimenet egyik kapcsa sem (jelen esetben az ábrán az alsó vezeték) – ilyenkor általában plusz egy potenciált fel kell vennünk, ami plusz egyenletet hoz magával.

Ezekre későbbiekben látunk példát.

Ezek után jelen esetben például rövid megoldáshoz vezet, ha a hurokegyenletekből kifejezzük a girátor áramait, majd behelyettesítjük a girátor egyenleteibe. Ezek után a két csomóponti egyenletbe behelyettesítjük a kapott kifejezéseket (girátor feszültségei). Kis rendezés után kijön az eredmény. Egy lehetséges megoldása Maple-el:

```
restart;
Ug1:=-r*Ig2;
Ug2:=r*Ig1;
e1:=I1=(U1-U2)/R+(U1-Ug1)/(2*R);
e2:=I2=(U2-U1)/R+(U2-Ug2)/R;
f1:=U1=Ug1+Ig1*2*R;
f2:=U2=Ug2+Ig2*R;
Ig1:=solve(f1,Ig1);
```

```
Ig2:=solve(f2,Ig2);
G1:=I1=solve(e1,I1);
G2:=I2=solve(e2,I2);
collect(G1,{U1,U2});
collect(G2,{U1,U2});
```

Aminek eredménye az admittancia karakterisztika két egyenlete:

$$I_1 = U_1 \frac{r^2 + 3R^2}{R(r^2 + 2R^2)} + U_2 \frac{rR - r^2 - 2R^2}{R(r^2 + 2R^2)} \tag{2.8}$$

$$I_2 = U_1 \frac{-r^2 - 2R^2 - rR}{R(r^2 + 2R^2)} + U_2 \frac{r^2 + 4R^2}{R(r^2 + 2R^2)} \tag{2.9}$$

$$I_1 = 2,95mS \cdot U_1 - 1,70mS \cdot U_2 \tag{2.10}$$

$$I_2 = -2,30mS \cdot U_1 + 3,90mS \cdot U_2 \tag{2.11}$$

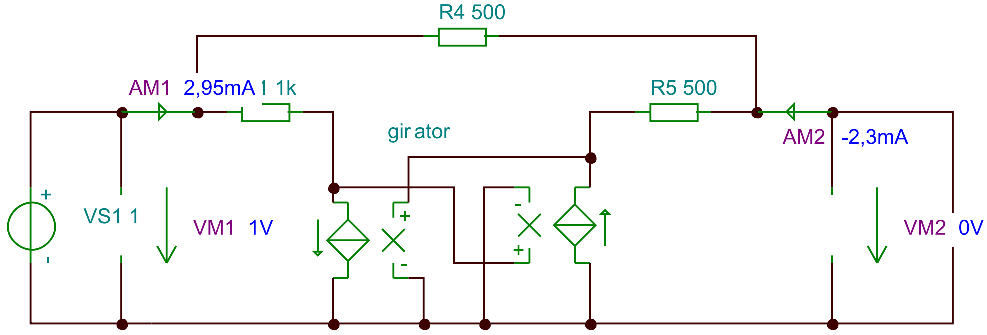
Megjegyzés Az eredményünket le is tudjuk ellenőrizni. Tinában realizált áramkörben (2.3.ábra 6.oldal) a mátrix egy elemének mérése:

$$I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 \tag{2.12}$$

$$\downarrow \tag{2.13}$$

$$G_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0} \tag{2.14}$$

Azaz az áramkörben $1V$-os feszültségforrást (U_1) kapcsolunk a primer oldalra, miközben a szekunder oldali rövidzár ($U_2 = 0$) áramát (I_2) mérjük. Ebben az esetben G_{21} értéke meg fog egyezni az I_2 értékével mA-ben.



2.3. ábra. Tinában realizált áramkör a G_{21} méréséhez

Ha ezek után bármely karakterisztikára szükségünk van, az egyszerű kirendezést jelent, jelen esetben a megvalósítás Maple-ben:

```
H1:=solve({e1,e2}, {U1, I2})[2];
H2:=solve({e1,e2}, {U1, I2})[1];
collect(H1,{I1,U2});
collect(H2,{I1,U2});
A1:=solve({e1,e2}, {U1, I1})[2];
A2:=solve({e1,e2}, {U1, I1})[1];
collect(A1,{U2,I2});
collect(A2,{U2,I2});
```

Megjegyzés `H1` és `H2` a hibrid karakterisztika, míg `A1` és `A2` a lánc karakterisztika első és második egyenletét adja. Lánc karakterisztika esetében I_2 referencia irány változása miatt az I_2 együtthatóját meg kell szoroznunk -1-el.

A választott három karakterisztika mátrixa:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 2,95 & -1,70 \\ -2,30 & 3,90 \end{bmatrix} mS \tag{2.15}$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0,34k\Omega & 0,57 \\ -0,78 & 2,58mS \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1,69 & -0,43k\Omega \\ 3,30mS & -1,28 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Megjegyzés Bár most még nem volt szükséges, de választottam koherens egységrendszert a számításokhoz:

$$[R] = k\Omega \tag{2.18}$$

$$[C] = \mu F \to [t] = [R] \cdot [C] = ms \to [\omega] = \frac{kRAD}{s} \tag{2.19}$$

$$[U] = V \to [I] = mA \to [P] = mW \tag{2.20}$$

Kis magyarázat azért ide is illik. Ami a koherens egységrendszer lényege, az hogy az egyes paraméterek nagyságrendbeli különbségét eltüntessük. Ennek pedig két oka van:

1. Nem zavarodik bele az ember a sok nullába, vagy 10^n leírásába, kisebb a tévesztési lehetőség.

2. Pontosabb eredményeket tud szolgáltatni, gyorsabb lesz a számítás (számítástechnikailag...)

Ezt úgy lehet elérni, hogy olyan prefixumokat (m, k, M, G, stb) alkalmazunk, amelyek mellett az eredmény mindig ugyanarra a prefixumra jön ki, akármilyen módon számítjuk (erre példa: $[t] = [R][C] = [L]/[R]$, t-nek mindkét esetben ugyanarra a prefixumra kell kijönnie). Körülbelül ennyit kell szem előtt tartani. Ha leírjuk a koherens egységrendszert, akkor attól a ponttól kezdve elhagyható az összes mértékegység (persze ez nem biztos, erősen gyakvez. függő lehet, de a számítási részeknél biztos elhagyható, a végeredményekben érdemes leírni, de ekkor viszont zárójelezni kell).

2.1.2. A karakterisztika vizsgálata

Feladat szövege: *Állapítsa meg, hogy a kétkapu reciprok, szimmetrikus és passzív-e!*

A háziban legegyszerűbb ha az inpedanci/admittancia karakterisztikákat használjuk fel. Reciprok, ha a mellékátló elemei azonosak. Ha ezen túl a főátló elemei is azonosak, akkor szimmetrikus is. A passzivitás feltétele pedig:

$$F_{11} \cdot F_{22} \geq \left(\frac{F_{12} + F_{21}}{2}\right)^2 \tag{2.21}$$

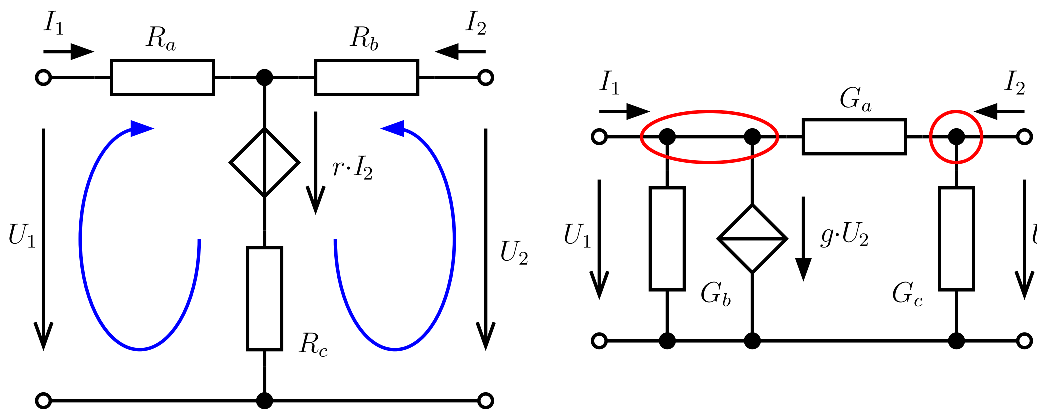
$$11,52 \overset{?}{\geq} 4 \tag{2.22}$$

Megjegyzés A passzivitás várható volt, hiszen csak fogyasztót (ellenállás) és non-energetikus (girátor) elemeket tartalmaz a hálózat.

Tehát hálózatunk nem reciprok és passzív (ha valami nem reciprok, akkor nem lehet szimmetrikus sem).

2.1.3. Helyettesítőkép paraméterezése

Feladat szövege: *Határozza meg a kétkapu alábbi hibrid T helyettesítését vagy amennyiben ez nem lehetséges, úgy határozza meg az alábbi hibrid Π helyettesítést!* Hibrid T helyettesítés esetében a két egyenlet:



2.4. ábra. Helyettesítőképek

$$U_1 = I_1 \cdot R_a + r \cdot I_2 + R_c \cdot (I_1 + I_2) \tag{2.23}$$
$$U_2 = I_2 \cdot R_b + r \cdot I_2 + R_c \cdot (I_1 + I_2) \tag{2.24}$$
$$\downarrow \tag{2.25}$$
$$U_1 = (R_a + R_c) \cdot I_1 + (r + R_c) \cdot I_2 \tag{2.26}$$
$$U_2 = R_c \cdot I_1 + (r + R_b + R_c) \cdot I_2 \tag{2.27}$$

Ebből létrehozható egy négy ismeretlenes egyenletrendszer, amit meg kell oldanunk:

$$R_{11} = R_a + R_c \tag{2.28}$$
$$R_{12} = r + R_c \tag{2.29}$$
$$R_{21} = R_c \tag{2.30}$$
$$R_{22} = r + R_b + R_c \tag{2.31}$$

Ha nem létezik $\underline{R}$ mátrix (mivel $\underline{G}$ mátrix determinánsa 0), akkor hibrid Π helyettesítés paramétereit kell meghatároznunk. Ennek két egyenlete:

$$I_1 = U_1 \cdot G_b + g \cdot U_2 + (U_1 - U_2) \cdot G_a \tag{2.32}$$
$$I_2 = U_2 \cdot G_c + (U_2 - U_1) \cdot G_a \tag{2.33}$$
$$\downarrow \tag{2.34}$$
$$I_1 = (G_b + G_a) \cdot U_1 + (g - G_a) \cdot U_2 \tag{2.35}$$
$$I_2 = -G_a \cdot U_1 + (G_c + G_a) \cdot U_2 \tag{2.36}$$

A megoldandó egyenletrendszere:

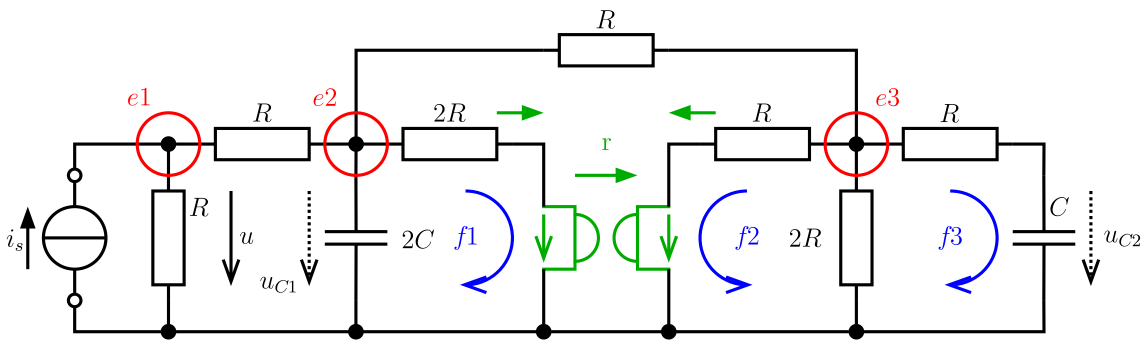
$$G_{11} = G_b + G_a \tag{2.37}$$
$$G_{12} = g - G_a \tag{2.38}$$
$$G_{21} = -G_a \tag{2.39}$$
$$G_{22} = G_c + G_a \tag{2.40}$$

Megjegyzés Előfordulhat, hogy negatív értékek jönnek ki, vagy esetleg nulla értékek. Ezek nem biztos, hogy hibás értékek. Egy ilyen negatív ellenállás érték esetében az adott ellenállás nem fogyaszt, hanem "termel".

2.2. Időbeli vizsgálat

2.2.1. Állapotváltozós leírás

Feladat szövege: *Vegyen fel állapotváltozókat, és jelölje be referenciairányukat az ábrába! Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat gerjesztése az áramforrás árama, válasza a bejelölt u feszültség. Adja meg a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának normál alakját! Válasszon egy koherens egységrendszert, adja meg az állapotváltozós leírást ezekre az egységekre vonatkozó számértékekkel! A további feladatrészekben is használja ezt az egységrendszert!*



2.5. ábra. Az hálózat jelölésekkel

Az állapotváltozó a kondenzátor feszültsége és a tekercs árama (könnyen megjegyezhető az energia képletek alapján: $1/2 \cdot C \cdot U^2$ és $1/2 \cdot L \cdot I^2$). A referenciairányok felvétele önkényes, érdemes úgy felvenni, hogy a későbbiekben felírt egyenletekben pozitív előjelet kapjunk.

- A girátor miatt be kell vezetnünk négy ismeretlent és két egyenletet.
- A három releváns csomóponti egyenlettel ($e1$, $e2$ és $e3$) bevezetjük a rendszerbe $\dot{u}_{C1}$ és $\dot{u}_{C2}$ állapot változó első rendű deriváltjait, a gerjesztést (i_s) és a választ (u).
- A girátor két egyenlete mellé fel kell vennünk további két részhurkot ($f1$ és $f2$), hogy ki tudjuk ejteni a girátor összes segéd változóját.
- $e1$ csomópont potenciálja u, $e2$ csomópont potenciálja u_{C1}. Az átláthatóság kedvéért $e3$ csomópont potenciálját ismeretlennek feltételezem (φ) így szükséges egy további egyenlet. Ez az $f3$ hurokegyenlet.

Megyjegyzés Az így létrehozott egyenlet rendszer minden komponens kapcsolatot tartalmaz és elégséges, hogy minden segédváltozót kiejtsünk. Bonyolultnak tűnhet, de alapvetően nem használtunk gráfelméletet hozzá és emellett a feladat lényegi része kész. Ezek után az elméletből ismert egyennletek alkalmazása lesz a feladatunk.

Az egyenleteink:

Girátor:

$$u_{g1} = -r \cdot i_{g2} \tag{2.41}$$

$$u_{g2} = r \cdot i_{g1} \tag{2.42}$$

Hurkok (f1, f2 és f3):

$$u_{C1} = 2Ri_{g1} + u_{g1} \tag{2.43}$$

$$\varphi = Ri_{g2} + u_{g2} \tag{2.44}$$

$$\varphi = RC\dot{u}_{C2} + u_{C2} \tag{2.45}$$

Csomópontok (e1, e2 és e3):

$$i_s = \frac{u}{R} + \frac{u - u_{C1}}{R} \tag{2.46}$$

$$0 = \frac{u_{C1} - u}{R} + 2C\dot{u}_{C1} + \frac{u_{C1} - u_{g1}}{2R} + \frac{u_{C1} - \varphi}{R} \tag{2.47}$$

$$0 = \frac{\varphi - u_{C1}}{R} + \frac{\varphi - u_{g2}}{R} + \frac{\varphi}{2R} + C\dot{u}_{C2} \tag{2.48}$$

A megoldás további részében érdemes számértékekkel számolni. Ennek egyetlen oka a bonyolultsága. Az ehhez szükséges koherens egységrendszert előzőleg (2.18.egyenlet 7.oldal) felírtuk.

$$\dot{u}_{C1} = -2,1158u_{C1} + 0,3071u_{C2} + 0,3125i_s \tag{2.49}$$

$$\dot{u}_{C2} = 0,8346u_{C1} - 1,7756u_{C2} \tag{2.50}$$

$$u = 0,5u_{C1} + 0,25i_s \tag{2.51}$$

2.2.2. Aszimptotikus stabilitás

Feladat szövege: *Határozza meg az állapotváltozós leírásból a sajátértékeket! Döntse el, aszimptotikusan stabilis-e a rendszer!*

A feladat első részéhez meg kell oldani a

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}} = 0 \tag{2.52}$$

egyenletet, ahol $\underline{\underline{E}}$ az egységmátrix.

$$\lambda_1 = -2,4798 \tag{2.53}$$

$$\lambda_1 = -1,4116 \tag{2.54}$$

A feladat második részéhez a szükséges ismeret: Minden sajátérték valós részének negatívnak kell lennie.

$$\forall \lambda_i : \Re\{\lambda_i\} < 0 \tag{2.55}$$

Megyjegyzés A házi feladatokban általában teljesül ez a feltétel.

2.2.3. Impulzusválasz

Feladat szövege: *Az időtartományban végzett analízissel határozza meg a hálózat által reprezentált rendszer impulzusválaszát (súlyfüggvényét), és vázolja fel az eredményt! Gerjesztés-válasz stabilis-e a rendszer?*

A feladat megoldására két lehetőség van. Ebben a feladatban a mátrixfüggvények segítségével oldjuk meg a problémát. A módszer előnye, hogy nem kell megérteni:-) A viccet félretéve: egyetlen egyenlettel megoldható a feladat és nem kell hozzá érteni a differenciálegyenlet elméleti hátterét.

Megyjegyzés A megoldás során egy többváltozós differenciál egyenlet rendszert kell megoldanunk. Ennek elméleti hátterét csak későbbi tanulmányok során ismerjük meg.

A feladat megoldásának formulái (SISO[1] rendszerben):

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\left(\underline{C}^T \cdot \mathrm{e}^{\underline{A}t} \cdot \underline{B}\right) \tag{2.56}$$

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \underline{L}_i \tag{2.57}$$

$$\underline{L}_i = \prod_{p=1\ p\neq i}^{N} \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p} \tag{2.58}$$

Ami $N = 2$ esetében

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\left[\underline{C}^T \cdot \left(\mathrm{e}^{\lambda_1} \cdot \frac{\underline{A} - \lambda_1 \underline{E}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \mathrm{e}^{\lambda_2} \cdot \frac{\underline{A} - \lambda_2 \underline{E}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \cdot \underline{B}\right] \tag{2.59}$$

Megyjegyzés A Lagrange-mátrixok ($\underline{L}_1$ ... $\underline{L}_N$) összege az egységmátrixot kell, hogy adja. Ennek megfelelően csak N-1 Lagrange-mátrixot kell kiszámítani a fentebb leírt képlettel ($N = 2$ esetében egyet kiszámolunk a másikat pedig akár fejben is kiszámolhatjuk).

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2,116 & 0,3071 \\ 0,8346 & -1,776 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0,3125 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

$$D = 0,25 \tag{2.63}$$

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} 0,6589 & -0,2875 \\ -0,7815 & 0,3405 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} 0,3410 & 0,2875 \\ 0,7815 & 0,6595 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = 0,1030 \cdot \mathrm{e}^{-2,4798t} + 0,0533 \cdot \mathrm{e}^{-1,4116t} \tag{2.66}$$

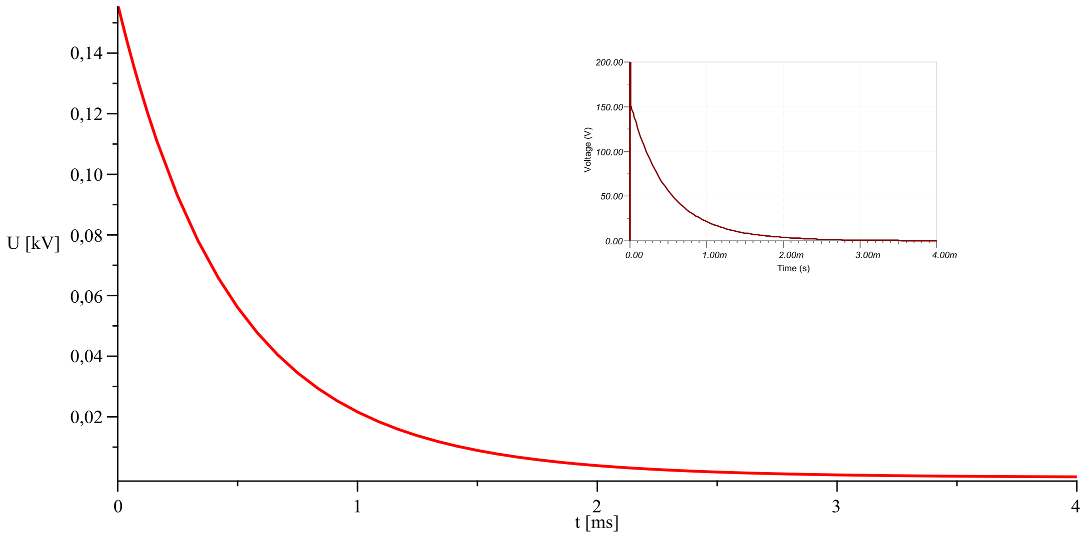
$$h(t) = 0,25 \cdot \delta(t) + \varepsilon(t)\left(0,1030 \cdot \mathrm{e}^{-2,4798t} + 0,0533 \cdot \mathrm{e}^{-1,4116t}\right) \tag{2.67}$$

[1]Single input, single output

Ábrázolás Kérdés, hogy hogyan kell ábrázolni a megoldást. Ebben az esetben két sajátértékünk van. Minden sajátértékhez megfeleltethető egy időállandó a következőképpen:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda_i} \tag{2.68}$$

A τ időállandóval jellemzett exponenciális függvény esetében igaz, hogy 3τ idő alatt a végértéket (a végtelenben felvett értéket) 95%-osan, míg a 5τ idő alatt a végértéket 99%-osan megközelíti. Ennek megfelelően a függvényt a legnagyobb időállandó ötszöröséig kell ábrázolni. Esetünkben ez megközelítőleg $4\,s$.



2.6. ábra. Az impulzusválasz ($h(t)$). A kisebb ábra a Tina szimuláció eredménye.

Gerjesztés-válasz (GV) stabilitás Ellenőrizni kell, hogy véges gerjesztésre a rendszer véges választ produkál:

$$|u(t)| \leq M_1 < \infty, \forall t \in [0, \infty[\Rightarrow |y(t)| \leq M_2 < \infty, \forall t \in [0, \infty[\tag{2.69}$$

$$\int_0^\infty |h(t)|\,\mathrm{d}t \leq M < \infty \tag{2.70}$$

Röviden: le kell integrálni 0-tól ∞-ig az impulzusválasz abszolút értékét. Ha az eredményünk véges, akkor GV stabilis a rendszer.

2.2.4. Ugrásválasz

Feladat szövege: *Az időtartományban végzett analízissel határozza meg a hálózat által reprezentált rendszer ugrásválaszát (átmeneti függvényét), és vázolja fel az eredményt!*

A feladat megoldása során konvolúciót kell alkalmazni.

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t-\tau) \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.71}$$

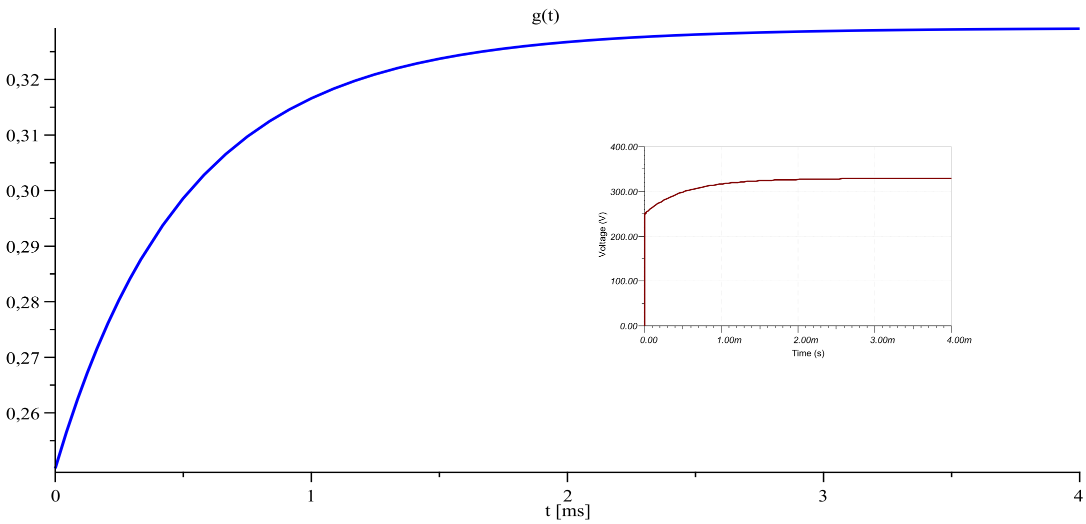
Jelen esetben a gerjesztésünk ($u(t)$) az egységugrás ($\varepsilon(t)$), így az integrálási határok átírásával jelentősen egyszerűsödik a konvolúciós képlet:

$$g(t) = \int_{-0}^{t} \varepsilon(t-\tau) \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-0}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.72}$$

Ami gyakorlatilag egy határozott integrálás.

$$g(t) = \int_{-0}^{t} 0,25 \cdot \delta(\tau) + \varepsilon(\tau)\left(0,1030 \cdot \mathrm{e}^{-2,4798\tau} + 0,0533 \cdot \mathrm{e}^{-1,4116\tau}\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.73}$$

A $\delta(\tau)$ integráltja egy $\varepsilon(\tau)$ függvény, míg az $\varepsilon(\tau)$ szorzótényezőjű részt nekünk kell kiszámítani.



2.7. ábra. Az ugrásválasz ($g(t)$). A kisebb ábra a Tina szimuláció eredménye.

2.2.5. Válasz számítás

Feladat szövege: *Az időtartományban végzett analízissel határozza meg a hálózat által reprezentált rendszer válaszát, és vázolja az eredményt, ha a gerjesztés:*

$$u(t) = A_0\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{1,5 \cdot T}} \tag{2.74}$$

Ez az olvasó házija :-) A feladat egyszerű, ugyanúgy konvolúciót kell alkalmazni. A trükk (ha nevezhető annak) annyi, hogy az integrált fel kell bontanunk két intervallumra. Az első intervallum $[0, T]$, míg a második $[T, \infty]$.

2.3. Frekvenciabeli vizsgálat

2.3.1. Átviteli karakterisztika

Feladat szövege: *Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat gerjesztése az áramforrás árama, válasza a bejelölt u feszültség. Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját ($j\omega$ rendezett polinomjainak hányadosaként)!*

Hasonló a feladat megoldása, mint a 2-es feladatban, viszont itt eggyel kevesebb egyenlet szükséges ($f3$ hurokra nem kell felírni egyenletet).

$$u_{g1} = -r \cdot i_{g2} \tag{2.75}$$

$$u_{g2} = r \cdot i_{g1} \tag{2.76}$$

$$i_s = \frac{u}{R} + \frac{u - \varphi_1}{R} \tag{2.77}$$

$$0 = \frac{\varphi_1 - u}{R} + \varphi_1 \cdot j\omega 2C + \frac{\varphi_1 - u_{g1}}{2R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \tag{2.78}$$

$$0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} + \frac{\varphi_2 - u_{g2}}{R} + \frac{\varphi_2}{2R} + \frac{\varphi_2}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{2.79}$$

Látható, hogy azért nem szükséges $f3$ hurokra felírni egyenletet, mert az általa leírt kapcsolatot tartalmazza az utolsó egyenlet (egyszerű soros eredő ellenállás képlet az utolsó egyenlet utolsó tagja). φ_1, φ_2, i_{g1} és i_{g2} kifejezése után egyetlen egyenletünk marad, amiben két változó lesz: u és i_s. Feladatunk ezt rendezni úgy, hogy az egyik oldalon $\frac{u}{i_s}$ legyen.

Az eredményünk egy szép nagy kifejezés lesz, ami a számértékek behelyettesítése után:

$$H(j\omega) = \frac{u}{i_s} = \frac{0,5805 \cdot (j\omega)^2 + 2,6217 \cdot j\omega + 2.6762}{2,3219 \cdot (j\omega)^2 + 9,0355 \cdot j\omega + 8,128} \tag{2.80}$$

$j\omega$ rendezett polinomjainak hányadosa Sok képe van a rendezett polinomnak. Tantárgy és témafüggő, hogy melyiket kérik vagy részesítik előnyben. Amit leírtam az is rendezett polinom, de ezt lehet kicsit tovább rendezni: a számláló és nevezőt is úgy szorozzuk fel, hogy mindkét tagban a konstans +1 legyen, majd kiemeljük a maradék szorzótényezőt a tört elé:

$$H(j\omega) = 0,3293 \frac{1 + 0.9796 \cdot j\omega + 0,2169 \cdot (j\omega)^2}{1 + 1.112 \cdot j\omega + 0.2857 \cdot (j\omega)^2} \tag{2.81}$$

Ennek az az előnye, a házi szempontjából, hogy ezt tudjuk ellenőrizni, mivel a Tina is ezt adja ki eredményül (Analysis>Symbolic Analysis>Semi-symbolic AC transfer). Ezen kívül vegyük észre, hogy $\omega = 0$ esetében azonnal leolvasható az eredmény.

2.3.2. Bode és Nyquist diagram

Feladat szövege: *Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját! (A diagramok csak akkor fogadhatóak el, ha tetszőleges körfrekvenciához tartozó amplitúdó- és fázis-karakterisztika érték ezekről közelítőleg leolvasható.) A Nyquist-diagramon jelölje be a 3.3 pontbeli körfrekvenciához tartozó átviteli karakterisztika vektort, továbbá adja meg a mindkét diagramról leolvasott amplitúdó- és fáziskarakterisztika értéket!*

Ez itt egy kis elméleti/gyakorlati gyorstalpaló lesz, kicsit hosszúra sikerült, így megjelölöm az elejét és a végét.

Mi az az átviteli karakterisztika Ez egy frekvencia (körfrekvencia) függő komplex függvény. Mivel alapvetően a frekvencia valós szám, így elmondható, hogy egy olyan függvény, aminek értelmezési tartománya a valós számok halmaza (szűkíthető a pozitív valós számokra) és értékkészlete a komplex számok halmaza. Tehát a függvénynek megadunk egy frekvenciát és ő eredményül egy komplex számot ad vissza. Ennek fizikai értelmezése (lineáris, időinvariáns hálózat esetében) az, hogyha beadunk egy egységnyi amplitúdójú ω körfrekvenciájú szinuszos jelet, akkor megadja, hogy a kimeneten milyen amplitúdójú és fázishelyzetű jel jelenik meg (a linearitás miatt a frekvencia ugyanaz). Azért komplex, mert két fizikai skalár információ van benne: amplitúdóerősítés és fázistolás. A kettőt pedig tudjuk együtt ábrázolni egy komplex számmal, ahol a reprezentáló vektor hossza fogja adni az amplitúdóerősítést és a vektor szöge adja a fázistolást.

Tehát az átviteli karakterisztika a gyakorlatban egy olyan függvény, aminek egy bemenete (körfrekvencia) és két kimenete (erősítés-fázistolás / valós-komplex rész) van. Ennek ábrázolására két elterjedt mód létezik:

- Csináljunk két diagramot, melyben az egyik adja meg adott frekvenciára az amplitúdóerősítést a másik pedig a fázistolást. Ezt nevezzük Bode diagramnak.
- Csináljunk egy diagramot a következő módon: léptessük a frekvenciát $[0, \infty]$ tartományon kis lépésenként és minden frekvenciára számítsuk ki az átviteli karakterisztika komplex értékét. Ezeket az értékeket pedig ábrázoljuk a komplex síkon. Ezt nevezzük Nyquist diagramnak (szokás $[-\infty, \infty]$ tartományon ábrázolni).

Mindkét ábrázolásnak megvan a saját haszna, érdemes mindkét diagramot alaposan érteni.

Ha lineáris, kauzális és időinvariáns rendszerünk van, akkor ez a függvény polinom/polinom alakú, ahol a nevező fokszáma legalább akkora, mint a számláló fokszáma (ez úgy jelenik meg, hogy „szép” a tört: a nevezője hosszabb). Ebből a formából adódik, hogy mindkét abrázolási mód egy kellően sima, folytonos diagramot ad.

Ha a rendszerben van egy fix késleltetés (gyakorlatban ezt a hosszú jelutak és a jelfeldolgozó áramkörök okozzák főként), akkor az egy exponenciális taggal bővíti a kifejezést (ez már csak hab a tortán, nem tudom anyag-e).

Mi az a logaritmikus skála? Lineáris skála legegyszerűbb példája a vonalzó. Mindenki látott már ilyen eszközt: ezen a skálán az egységnyi távolsághoz egységnyi különbség tartozik (ugyanakkora a távolság az $1\,cm$ és $2\,cm$ között, mint a $10\,cm$ és $11\,cm$ között). A képzeletbeli logaritmikus vonalzón az egységnyi távolsághoz egységnyi arány tartozik (ugyanakkora a távolság az $1\,cm$ és $10\,cm$ között, mint a $10\,cm$ és $100\,cm$ között). Azért jó, mert könnyebben ábrázolhatók benne azok a dolgok, amiknél nagy a befogási arány (egy bode diagramon simán megtörténhet, hogy a legnagyobb erősítés 10^5 és számunkra fontos információ, hogy mely frekvencián éri el az egységnyi erősítést). Átviteli tényező esetében a mértékegységünk a Bell, pontosabban ennek tizede a decibell (dB), melynek definíciója:

$$a^{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{X}{X_{\text{ref}}}\right) \tag{2.82}$$

Ahol X_{ref} a referencia érték. Ez gyakorlatilag bármi lehet, viszont vannak szabványosított referencia értékek. Például a $dBmV$ egy feszültség referencia: $1\,mV$ a $0\,dBmV$.

Ez a referencia intenzitás vagy teljesítmény szokott lenni, ekkor alkalmazható a 10-es szorzó. Feszültség és áram esetében viszont 20-as szorzótényező alkalmazandó. Egy egyszerű példa a magyarázatra: ellenálláson keresztül $1\,V$ hatására $1\,A$ áram folyik, ami $1\,W$ teljesítményt jelent. Ha szeretnénk a teljesítményt megszázszorozni ($20\,dB$), akkor a feszültséget tízszerezni kell ($20\,dB$).

Ezt a két témát még egy darabig lehetne boncolgatni. Mindkét dolog nagyon fontos az egyetemi tanulmányok során, de a doksi nem erről szól, így ennyi is elég ide.

A Tina, a Maple és a MATLAB is képes ábrázolni gyakorlatilag néhány kattintás vagy 1-2 parancs után ezeket a diagramokat. Maple-ben a Bode diagram:

```
with(DynamicSystems):
num:=[0.58050, 2.6217, 2.6762]:
den:=[2.3219, 9.0355, 8.1280]:
sys:=TransferFunction(num, den): PrintSystem(sys);
B:=Array(1..2,1..1):
B[1,1]:=MagnitudePlot(sys):
B[2,1]:=PhasePlot(sys):
display(B);
```

Ezzel egymás alatt jelenik meg a két diagram. `num` és `den` a számlálót és a nevezőt reprezentáló két vektor. MATLAB-ban:

```
bode(num, den)
```

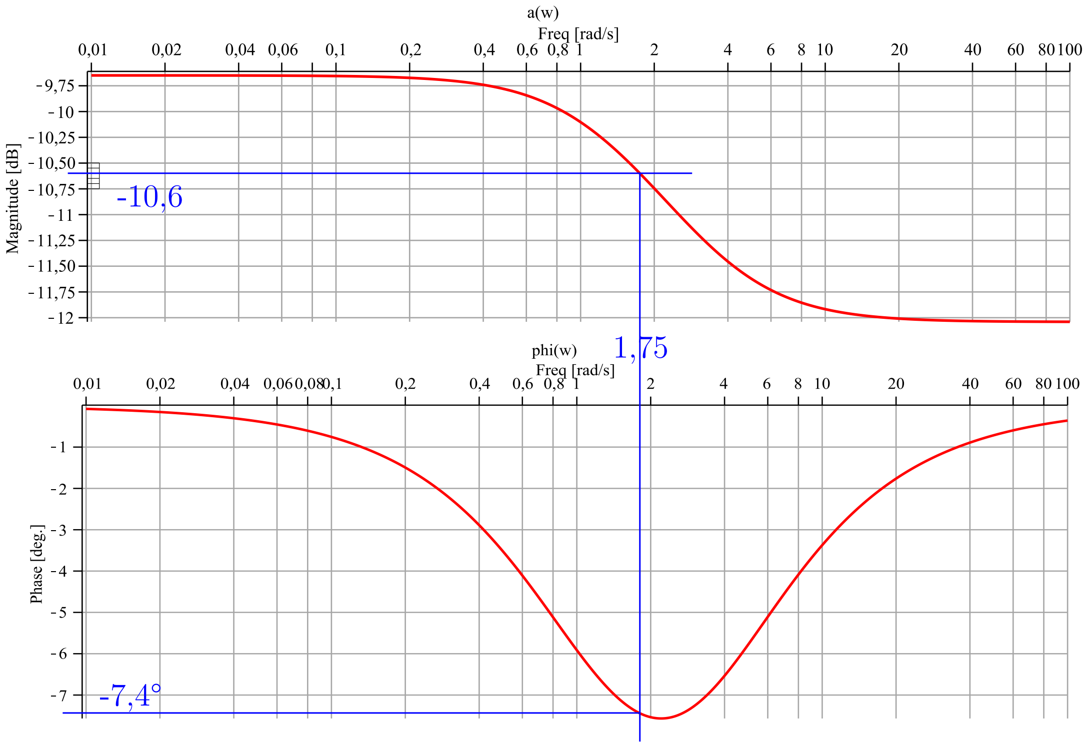
Maple-ben a Nyquist diagram:

```
with(plots):
complexplot({Hjw,0}, w=-1000..1000, numpoints=1000,
thickness=2, scaling=constrained);
```

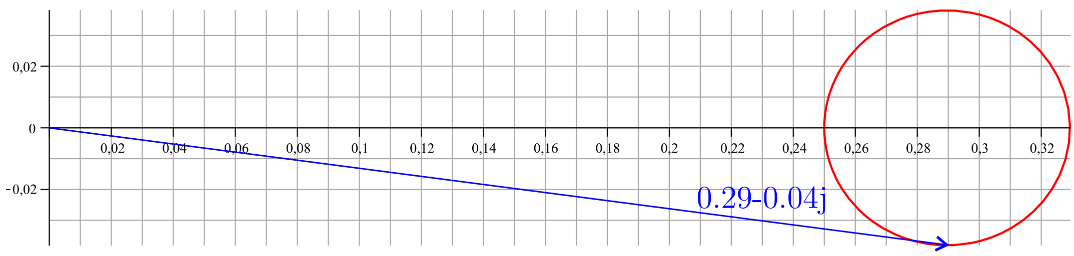
Itt annyi a trükk, hogy érdemes megjeleníteni a $0 + 0j$ pontot. Mivel ilyenkor a vizsgálati pontok eloszlása lineáris, így érdemes több mérésipontot felvenni. A Maple a két tengelyt dinamikusan skálázza, ami komplex ábrázoláskor információvesztést okozhat (komplex síkon szeretjük, ha az egység kör tényleg kör). MATLAB-ban:

```
nyquist(num, den)
```

És most vissza kell kicsit térni a koherens egységrendszerhez, mivel eddig azzal számoltunk, most pedig értelmeznünk kell az eredményt. Az időt ms-ban adtuk meg, így a körfrekvencia (vízszintes tengely a Bode diagramnál) $kRAD/s$. A fázistolás prefixum nélküli, viszont az átviteli karakterisztika „mértékegysége" $k\Omega$, mivel a gerjesztésünk áram, a válaszunk pedig feszültség. Ennek megfelelően a Nyquist diagram mindkét tengelye $k\Omega$ mértékegységű, az amplitúdómenet függőleges tengelye viszont $60\,dB - el$ fentebb van, mint ahogy mi ábrázoltuk. Tehát amit mi $-10,60\,dB$-ként leolvasunk az valójában $49,40\,dB$ és valójában nem is biztos, hogy ebben az esetben reális dB-ben megadni. Mindenesetre ilyenkor nagyon oda kell figyelni, hogyan feliratozzuk a tengelyeket. Szerintem jó alapelv, hogy ha nem összeegyeztethető a



2.8. ábra. Bode diagram, $1,75\,kRAD/s$ körfrekvencián bejelölve az amplitúdó erősítés és a fázistolás. A tengelyek mértékegységei elcsúsztak a koherens egységrendszer használata miatt.



2.9. ábra. Nyquist diagram, $1,75\,kRAD/s$ körfrekvencián bejelölve a komplex vektor.

gerjesztés és a válasz (mert az átviteli karakterisztika mértékegysége Ω vagy S), akkor ne dB-ben adjuk meg, hanem arányszámban. A Bode és Nyquist diagramokat Tinában Analysis>AC Analysis>AC Transfer Characteristic... menüpont alatt tudjuk kirajzoltatni.

2.3.3. Válasz meghatározása

Feladat szövege: *Határozza meg a válasz csúcsértékét és kezdőfázisát, adja meg az időfüggvényt, ha a gerjesztés* $A_0 \cdot sin(1,4 \cdot \omega t + 50°)$! A gerjesztőjelünk:

$$u(t) = A_0 \cdot \sin(1,4 \cdot \omega t + 50°) \tag{2.83}$$

$$\hat{\hat{U}} = A_0 \cdot \mathrm{e}^{j \cdot \left(\frac{5}{18} + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)} \tag{2.84}$$

A válaszunk:

$$\hat{\hat{Y}} = a \cdot A_0 \cdot \mathrm{e}^{j\cdot\left(\frac{5}{18}+\frac{1}{2}\cdot\pi\right)+\Delta\varphi} \tag{2.85}$$

$$\omega_0 = 1,4 \cdot \frac{1}{2CR} \tag{2.86}$$

$$a = |H(j\omega_0)| = 0,2951 \tag{2.87}$$

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{\Im\{H(j\omega_0)\}}{\Re\{H(j\omega_0)\}}\right) = -0,1292 \tag{2.88}$$

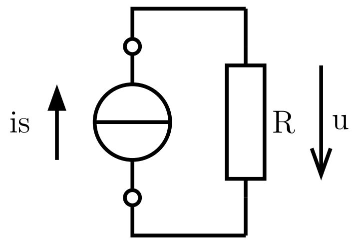
$$y(t) = \underbrace{0,2951 \cdot 15}_{\text{csúcsérték}} \cdot \sin(1,75[kRAD/s]t + \underbrace{50^\circ - 7,4^\circ}_{\text{kezdőfázis}})[V] \tag{2.89}$$

Ahol a az adott körfrekvencián (ω_0) az amplitúdóerősítés és $\Delta\varphi$ a fázistolás.

A Tinában ezt is viszonylag könnyen tudjuk ellenőrizni. Beállítjuk a generátort az adott gerjesztésnek megfelelően, majd Analysis>Symbolic Analysis>Semi-symbolic AC result.

2.3.4. Teljesítmény számítás

Feladat szövege: *Határozza meg a válasz által kijelölt (az ábrában folytonos vonallal bekarikázott) kétpólus hatásos és meddő teljesítményét, valamint teljesítménytényezőjét!*



2.10. ábra. A vizsgált kétpólus

Az előző feladatban kiszámítottuk az ellenálláson mérhető feszültséget és a gerjesztésünk az áram. Ebből a két értékből, és az ellenállás értékéből a teljesítmény számítható:

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \left(\frac{\overline{U}}{R}\right)^* - \overline{U} \cdot \overline{I}^* = -26,66 + j \cdot 8,517[mVA] \tag{2.90}$$

Ahol a * jelzés a konjugáltra vonatkozik. Az eredmény valós része a hatásos teljesítmény (P), képzetes része a meddő teljesítmény (Q) és abszolult értéke a látszólagos teljesítmény (S). A negatív teljesítmény termelést jelent, de ezt vártuk is, hiszen a generátor is a kétpólus része.

3. Néhány megjegyzés az első minta után

Kicsit ijesztő lehet, hogy ilyen hosszúra sikerült egy feladat kidolgozása, de csak azért lett ilyen hosszú, hogy a többit viszonylag gyorsan le tudjuk zavarni. Alapból egy-egy feladat (amit le kell adni) kézzel írva 4-6 oldal, plusz az ábrák (ezeket sok esetben érdemes kinyomtatni). Az első mintán direkt nem kívántam bemutatni, hogy mit kell leadni, inkább csak az elméleti háttérrel próbáltam vegyíteni a dolgokat.

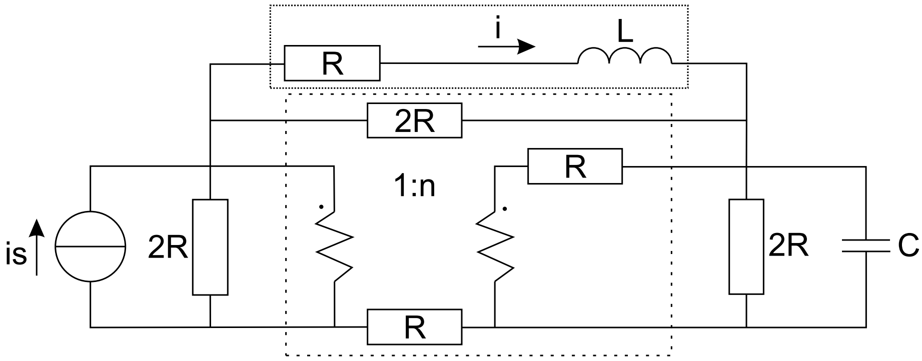
Sokan lenézik a jelek házikat, pedig nagyon nem szabad. Ha rászánja valaki az időt, akkor nagyon sokat tanulhat az ember a J&R1 HF-ból:

- Integrálás a gyakorlatban,
- MATLAB, Maple, Tina használata,
- dokumentáció készítés,
- a munkádat megtanulod saját magad minősíteni (legalább nagyságrendileg jó-e amit csináltunk).

Kicsit talán a mérnöki látásmódba is előrébb ráncigálja az embert, ha tényleg tisztességesen rászánja az időt, de ha ez nem is igaz, akkor is a ZH-kra jó felkészülés. És még valami: a ZV-n sok a jelek. De ha ez nem elég, akkor sok tantárgy épít a jelekre. Szóval a HF jó!

A dokumentációról még írok pár sort, viszont valamit most meg kell jegyezni: erre a HF-re is rá kell szánni az időt. Mikor elsőnek ugrottam neki a jelek HF-mnek, akkor két hét volt a vége, főleg mivel a beadási határidők már bőven benne vannak a ZH időszakban. Nem érdemes arra gyúrni, hogy egy éjszaka alatt megcsinálod. Ha érted az elméletet, akkor 1-2 délután a HF piszkozat írás, illetve az eredmények kiszenvedése, egy délután az ellenőrzés és még egy délután a dokumentálás.

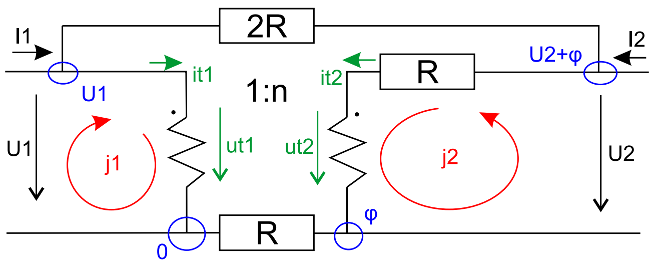
4. Második minta



4.1. ábra. Második mintafeladat kapcsolási rajza

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
R & C & L & n & \omega & T & A_0 \\
\hline
10\,M\Omega & 5\,pF & 2\,H & 2 & 1/RC & 10 \cdot RC & 10\,mA
\end{array}
\tag{4.1}
$$

4.1. Kétkapu vizsgálata



4.2. ábra. Szaggatott vonallal határolt kétkapu

4.1.1. Karakterisztika meghatározása

A hálózatra felírható egyenletek:

$$
\begin{aligned}
\text{transzformátor:}& \\
u_{t2} &= n \cdot u_{t1} \\
i_{t1} &= -n \cdot i_{t2} \\
\text{csomópontok:}& \\
I_1 &= \frac{U_1 - U_2 - \varphi}{2R} + i_{t1} \\
I_2 &= \frac{U_2 + \varphi - U_1}{2R} + i_{t2} \\
i_{t2} &= \frac{\varphi}{R} + I_2 \\
\text{hurkok:}& \\
U_1 &= u_{t1} \\
U_2 &= i_{t2} \cdot R + u_{t2}
\end{aligned}
$$

Az öt ismeretlen (transzformátor paraméterek és φ) kifejezése után az eredmény:

$$I_1 = \frac{1}{3}\frac{1+3n^2}{R}U_1 - \frac{1}{3}\frac{1+3n}{R}U_2$$
$$I_2 = -\frac{1}{3}\frac{1+3n}{R}U_1 + \frac{4}{3}\frac{1}{R}U_2$$

A koherens egységrendszer egy részlete (ami ehhez a feladathoz kell): $[R] = M\Omega$ és $[n] = 1$

A fenti egyenletrendszert felhasználva meghatározható az R, H és A karakterisztikák:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{4\,R}{1+n^2-2\,n} & \frac{(3\,n+1)\,R}{1+n^2-2\,n} \\ \frac{(3\,n+1)\,R}{1+n^2-2\,n} & \frac{(1+3\,n^2)\,R}{1+n^2-2\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 70 \\ 70 & 130 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{3\,R}{1+3\,n^2} & \frac{3\,n+1}{1+3\,n^2} \\ -\frac{3\,Rn+R}{(1+3\,n^2)\,R} & -\frac{-1-n^2+2\,n}{(1+3\,n^2)\,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{13} & \frac{7}{13} \\ -\frac{7}{13} & \frac{1}{130} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\,n+1} & \frac{3\,R}{3\,n+1} \\ -\frac{-1-n^2+2\,n}{(3\,n+1)\,R} & \frac{R+3\,Rn^2}{(3\,n+1)\,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 & \frac{30}{7} \\ \frac{1}{70} & \frac{13}{7} \end{bmatrix}$$

4.1.2. A karakterisztika vizsgálata

A vizsgálathoz az **R** mátrixot használtam fel:

- $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}$, így reciprok,
- $\mathbf{R}_{11} \neq \mathbf{R}_{22}$, így nem szimmetrikus,
- passzív mivel csak passzív elemet tartalmaz. Ezen kívül $\mathbf{R}_{11}$ és $\mathbf{R}_{22}$ pozitív, illetve:

$$\mathbf{R}_{11} \cdot \mathbf{R}_{22} \geq \frac{\mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{21}}{2}^2$$
$$5200 \geq 4900$$

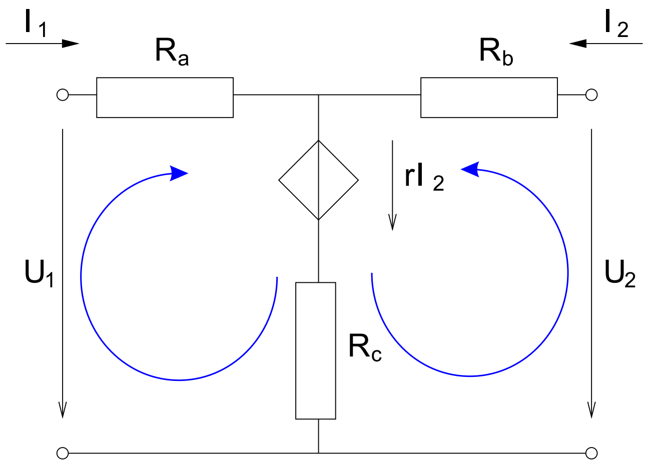
4.1.3. Helyettesítőkép paraméterezése

A helyettesítőképre felírható két hurokegyenlet:

$$U_1 = R_a \cdot I_1 + r \cdot I_2 + R_c \cdot I_1 + I_2$$
$$U_2 = R_b \cdot I_2 + r \cdot I_2 + R_c \cdot I_1 + I_2$$

Amiből az impedancia karakterisztikája:

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} Ra + Rc & Rc + r \\ Rc & Rc + Rb + r \end{bmatrix}$$



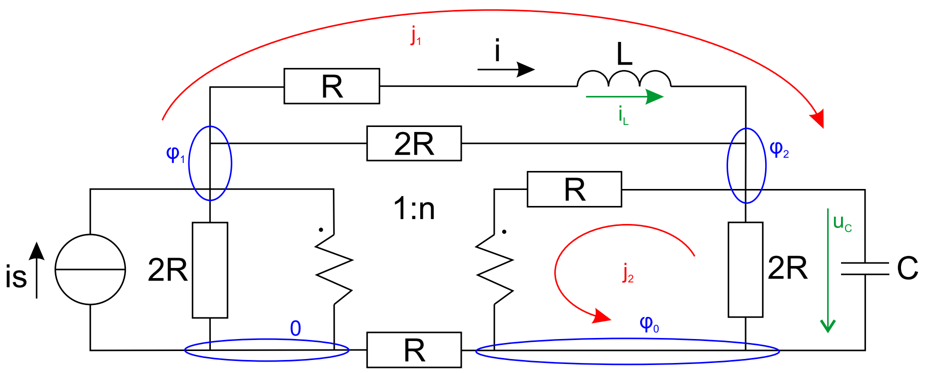
4.3. ábra. Hibrid T helyettesítőkép

A helyettesítőkép paramétereinek meghatározásához a két mátrixot ($\mathbf{R}$ és $\mathbf{R}_T$) egyenlővé kell tenni. Ez négy egyenletet és négy ismeretlent jelent, melynek megoldása:

$$\begin{aligned} R_a &= -\frac{3R}{n-1} = -30\,[M\Omega] \\ R_b &= \frac{3Rn}{n-1} = 60\,[M\Omega] \\ R_c &= \frac{R(3n+1)}{1+n^2-2n} = 70\,[M\Omega] \\ r &= 0[M\Omega] \end{aligned}$$

4.2. Időbeli vizsgálat

4.2.1. Állapotváltozós leírás



4.4. ábra. A hálózat az állapotváltozók bejelölésével (zöld) és a csomópontokkal(kék) / hurkokkal(piros)

A hálózatra felírható egyenletek:

$$
\begin{aligned}
&\text{transzformátor:}\\
&u_{t2} = n \cdot u_{t1}\\
&i_{t1} = -n \cdot i_{t2}\\
&\text{csomópontok:}\\
&i_s = \frac{\varphi_1}{2R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2R} + i_L + i_{t1}\\
&i_L = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2R} + i_{t2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2R} + C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t}\\
&i_{t2} = \frac{\varphi_0}{R} + \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{2R} - C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t}\\
&\text{hurkok:}\\
&\varphi_2 - \varphi_0 = R \cdot i_{t2} + u_{t2}\\
&\varphi_1 - \varphi_2 = R \cdot i_L + L \cdot \frac{\partial i_L}{\partial t}\\
&\varphi_1 = u_{t1}\\
&\varphi_2 - \varphi_0 = u_C\\
&\text{válasz:}\\
&i = i_L
\end{aligned}
$$

Melynek megoldása:

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial u_C}{\partial t} \\ \frac{\partial i_L}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10\,n^2 + 8\,n - 17}{(5 + 6\,n^2)\,2CR} & \frac{8\,Rn^2 - 8\,Rn + 4\,R}{(5 + 6\,n^2)\,2CR} \\ -\frac{4\,n^2 - 4\,n + 2}{(5 + 6\,n^2)\,L} & -\frac{10\,Rn^2 + 11\,R}{(5 + 6\,n^2)\,L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \frac{12\,Rn + 4\,R}{(5 + 6\,n^2)\,2CR} \\ \frac{4R}{(5 + 6\,n^2)\,L} \end{bmatrix} \cdot i_s
$$

$$
i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + 0 \cdot i_s
$$

Koherens egységrendszer

$$
\begin{aligned}
&[R] = M\Omega \quad [C] = pF \rightarrow [L] = H\\
&[t] = [R][C] = \frac{[L]}{[R]} = \mu s \rightarrow \omega = \frac{MRAD}{s} \qquad f = MHz\\
&[I] = A \rightarrow [U] = [I][R] = MV
\end{aligned}
$$

R	C	L	n	ω	T	A_0
10	5	2	2	$1/RC$	$10 \cdot RC$	0.01

Mely alapján az állapotváltozós leírás mátrixai számértékekkel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,01414 & 0,06897 \\ -0,1724 & -8,793 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,09655 \\ 0,6897 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2. Aszimptotikus stabilitás

A sajátértékek meghatározása a mátrixos leírás alapján:

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}\right) = 0$$
$$0.1362 + 8.807\lambda + \lambda^2 = 0$$
$$\lambda = \{-0,016\,;\, -8,879\}$$

Az aszimptotikus stabilitás feltétele, hogy minden sajátérték valós része negatív legyen:

$$\forall \lambda_i : \quad \Re\lambda_i \leq 0$$

Ami teljesül, tehát a rendszer Aszimptotikusan stabilis.

4.2.3. Impulzusválasz

Az alkalmazott egyenletek:

$$h(t) = \mathbf{D} \cdot \delta(t) + \varepsilon(t)\left(\mathbf{C}^T \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{A}\cdot t} \cdot \mathbf{B}\right)$$
$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}\cdot t} = \sum_1^2 \mathrm{e}^{\lambda_i \cdot t} \cdot \mathbf{L}_i$$
$$\mathbf{L}_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$
$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{L}_1$$

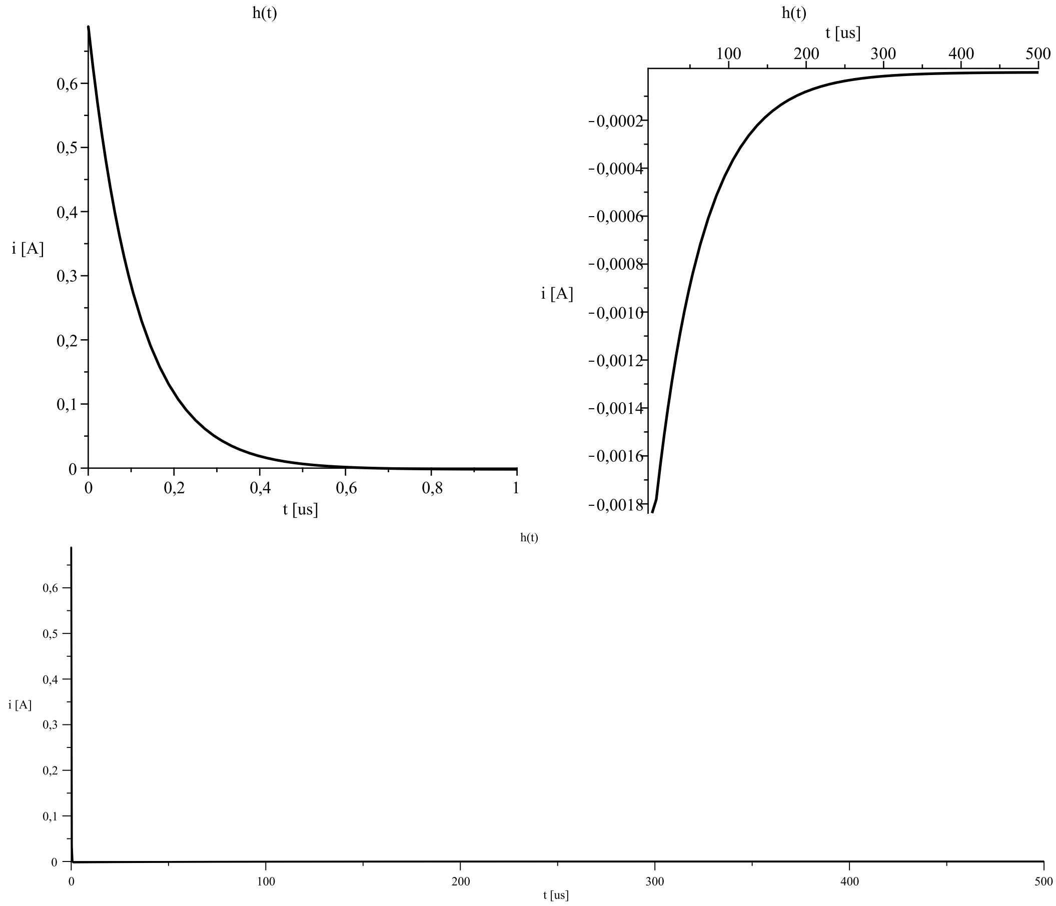
Ami számértékekkel kifejezve:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,007859 \\ -0,01965 & -0,0001139 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -0,0001139 & -0,007859 \\ 0,01965 & 1 \end{bmatrix}$$
$$h(t) = \varepsilon(t)\left(-0,002003\mathrm{e}^{-0,01549\cdot t} - 0,6917\mathrm{e}^{-8,7917\cdot t}\right)$$

A két időállandó ($\{62,5\,,\,0,11\}$ μs) között több, mint két nagyságrend különbség van, így két tartományon is ábrázolom az impulzusválaszt ((4.5.ábra 25.oldal)).

Gerjesztés-válasz stabilitás A függvény két exponenciális tagból áll, mindkét exponenciális tag kitevője negatív. Ezen megfontolásokból a rendszer GV stabilis:

$$\int_0^\infty |h(t)|\,\mathrm{d}t \leq M < \infty$$
$$\int_0^\infty |h(t)|\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{79}$$



4.5. ábra. A rendszer impulzusválasza három különböző időtartományban (bal felső saroktól olvasási irányban): $[0,1]\mu s$, $[1,500]\mu s$ és $[0,500]\mu s$

.

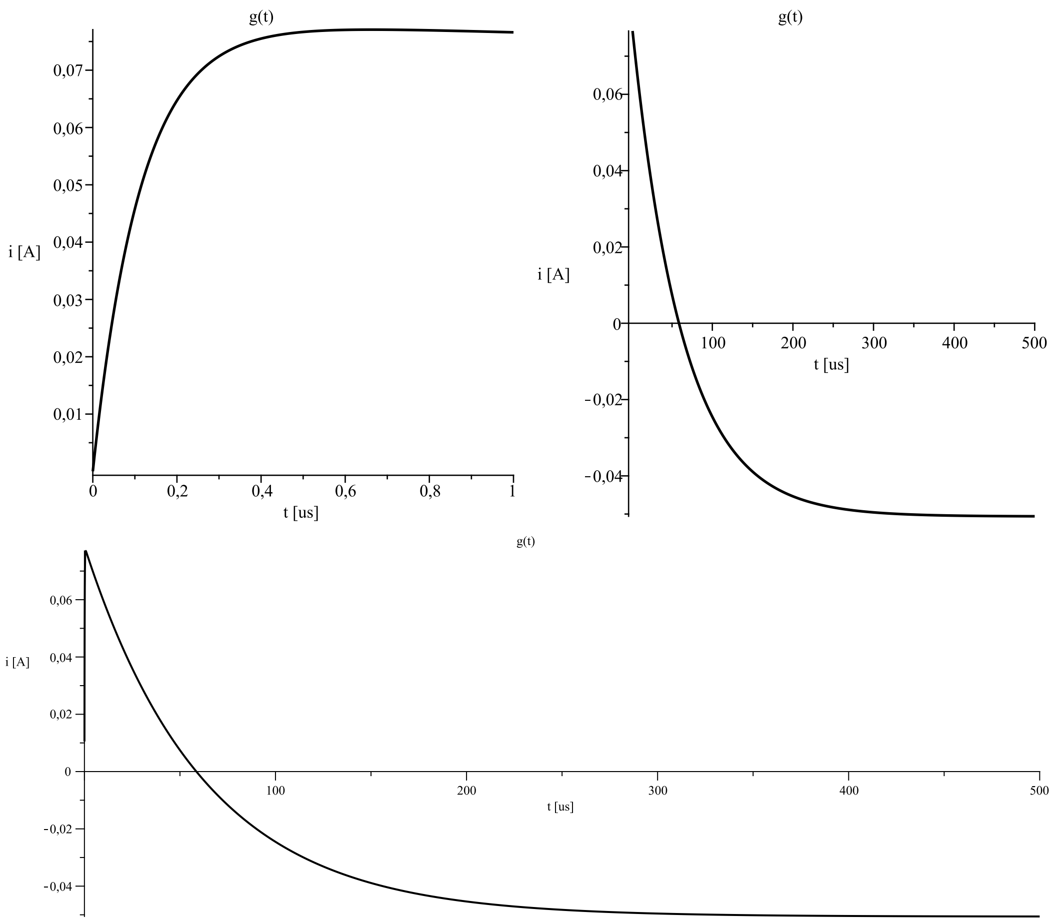
4.2.4. Ugrásválasz

Konvolúció segítségével:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t-\tau) \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$g(t) = \int_{-0}^{t} \varepsilon(t-\tau) \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-0}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \varepsilon(t)\left(0,1293 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}016 \cdot t} - 0,07868 \cdot \mathrm{e}^{-8{,}792 \cdot t} - 0,05063\right)$$

Ábrázolása az impulzusválaszhoz hasonlóan történik ((4.6.ábra 26.oldal)).



4.6. ábra. A rendszer ugrásválasza három különböző időtartományban (bal felső saroktól olvasási irányban): $[0, 1]\mu s$, $[1, 500]\mu s$ és $[0, 500]\mu s$

.

4.3. Frekvenciabeli vizsgálat

4.3.1. Átviteli karakterisztika

A hálózatra felírható egyenletek:

transzformátor:

$$u_{t2} = n \cdot u_{t1}$$
$$i_{t1} = -n \cdot i_{t2}$$

csomópontok:

$$i_s = \frac{\varphi_1}{2R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R + j\omega L} + i_{t1}$$
$$0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2R} + i_{t2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2R} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R + j\omega L} + (\varphi_2 - \varphi_0) j\omega C$$
$$i_{t2} = \frac{\varphi_0}{R} + \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{2R} + (\varphi_0 - \varphi_2) j\omega C$$

hurkok:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = R \cdot i_{t2} + u_{t2}$$
$$\varphi_1 = u_{t1}$$

válasz:

$$i = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R + j\omega L}$$

Az átviteli karakterisztikát az i/i_s hányados adja:

$$H(j\omega) = \frac{i}{i_s} = \frac{-2000 \cdot j\omega + 20}{2900 \cdot (j\omega)^2 + 25541 \cdot j\omega + 395}$$

4.3.2. Bode és nyquist diagram

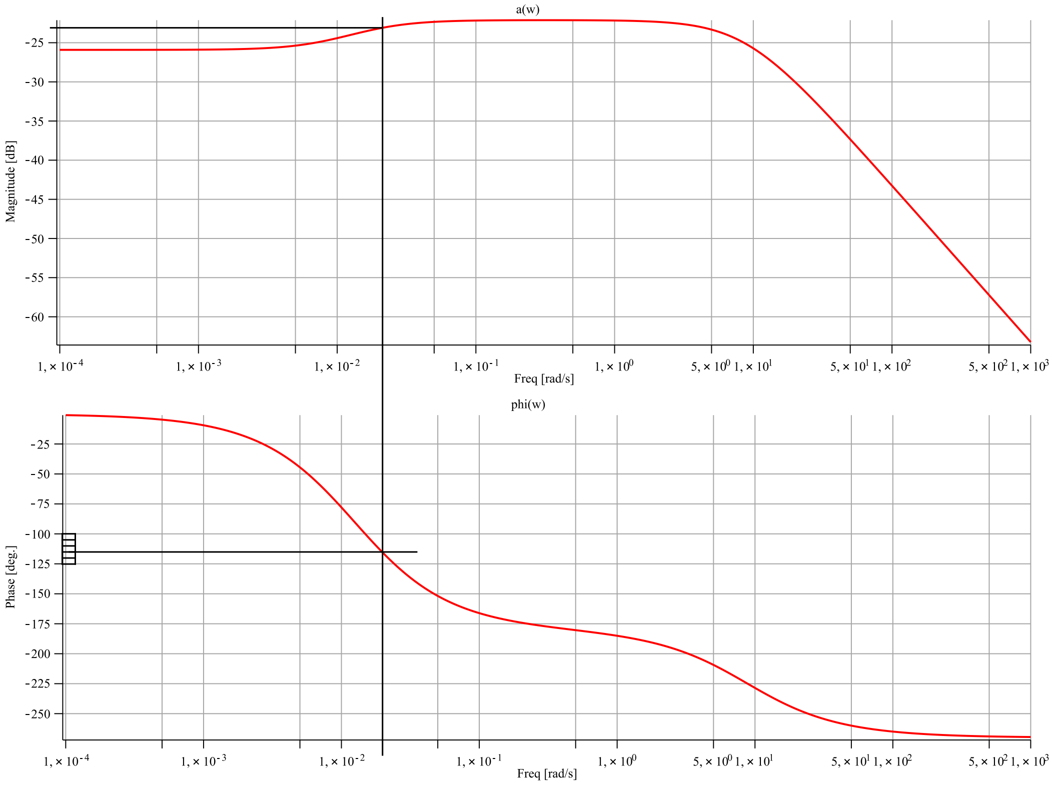
A számított átviteli értékek (ezeket jól megközelíti a leolvasott értékek):

$$\omega_0 = \frac{1}{50}(MRAD/s)$$
$$H(j\omega_0) = -0,03018 - 0,06242j$$
$$a(\omega_0)^{dB} = 20 \log |H(j\omega_0)| = -23,18\, dB$$
$$\Delta\varphi = \arg \frac{\Im\{H(j\omega_0)\}}{\Re\{H(j\omega_0)\}} = -115,8^\circ$$

4.3.3. Válasz meghatározása

Gerjesztésünk $A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + 30^\circ)$. A válasz számításának módja:

$$y(t) = A_0 \cdot |H(j\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + 30^\circ + \Delta\varphi) =$$
$$= 0,69 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - 1,498)\,(mA)$$



4.7. ábra. Bode diagram, $20\,kRAD/s$ körfrekvencián bejelölve az amplitúdó erősítés és a fázistolás. A vízszintes tengely értéke $MRAD/s$-ban értendő.

4.3.4. Teljesítmény számítás

A kétpólusunk számításának képlete:

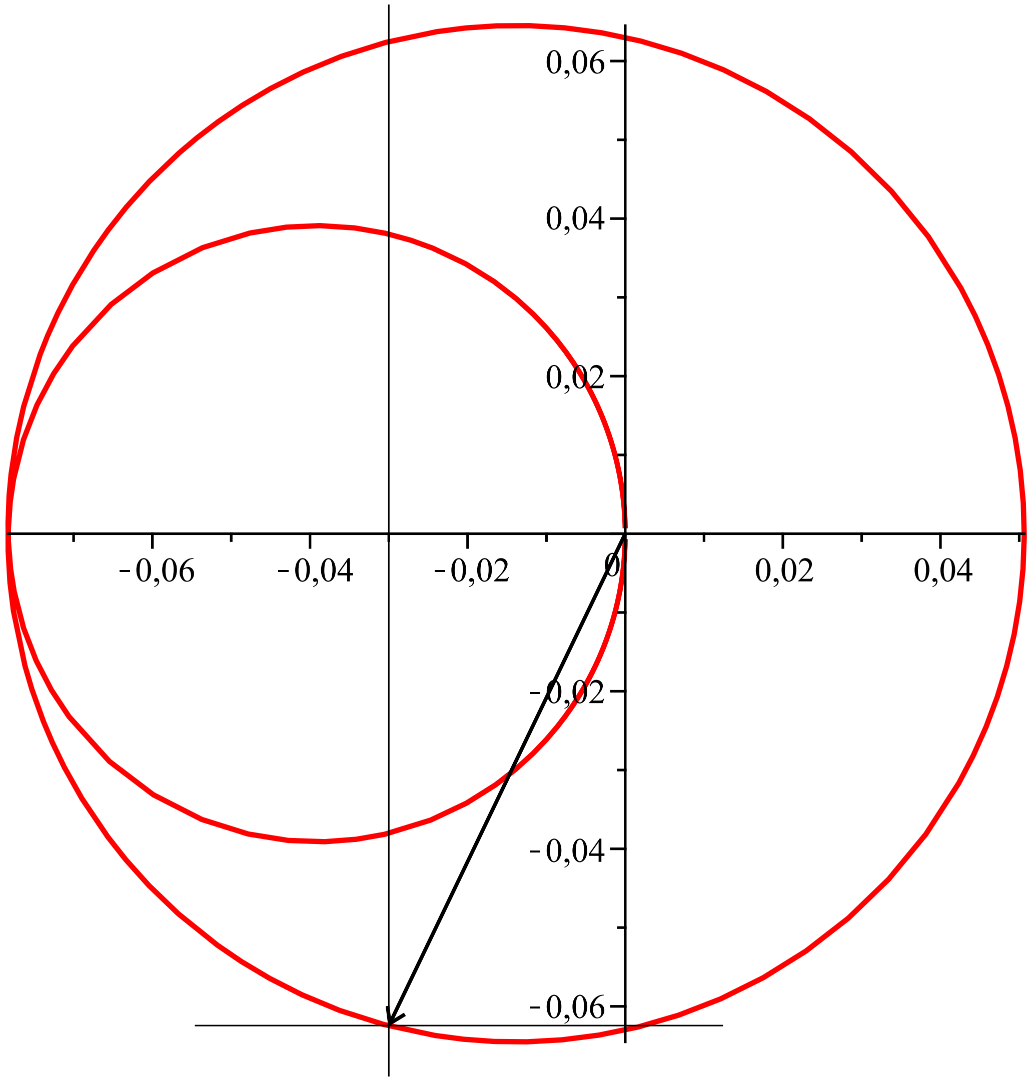
$$\hat{\hat{S}} = \frac{\left|\hat{\hat{Y}}\right|^2}{2} \cdot (R + j\omega_0 \cdot L) = 2,3766 + 0.3604(VA)$$

$$P = 2,3766(W)$$

$$Q = 0,3604(VAr)$$

$$S = \left|\hat{\hat{S}}\right| = 2,404(VA)$$

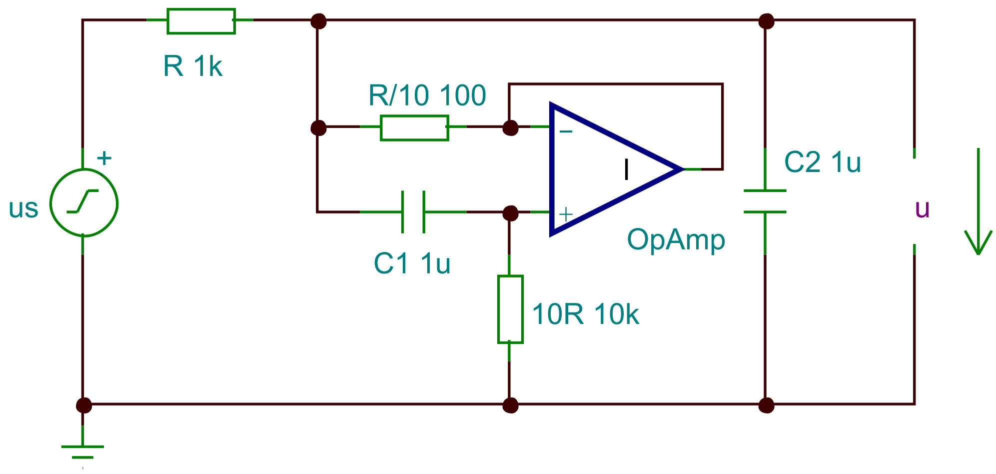
$$\cos(\varphi) = \frac{\Re\left\{\hat{\hat{S}}\right\}}{\left|\hat{\hat{S}}\right|}$$



4.8. ábra. Nyquist diagram, $20\,kRAD/s$ körfrekvencián bejelölve a komplex vektor.

5. Harmadik minta

Sokáig gondolkodtam, hogy mi legyen a harmadik feladat. Az előző feladatokból kimaradtak az aktív tagok (műveleti erősítő, vezérelt források) és a komplex konjugált sajátértékű problémák. Úgyhogy csináltam egy mintapéldát, amiben ezek szerepelnek. Ebben a fejezetben nem csinálom végig a feladatokat, csak bemutatom, hogy az adott problémát (alapvetően a komplex konjugált sajátérték problémát) hogyan is kell megoldani. Mivel „belül” van a C_1-es kondi, így az első feladatot kihagyjuk



5.1. ábra. Harmadik mintafeladat kapcsolási rajza

(nem tudok kiválasztani értelmes kétkaput). A többi feladatot viszont gond nélkül meg lehet ezen az áramkörön is csinálni.

5.1. Időbeli vizsgálat

5.1.1. Állapotváltozós leírás

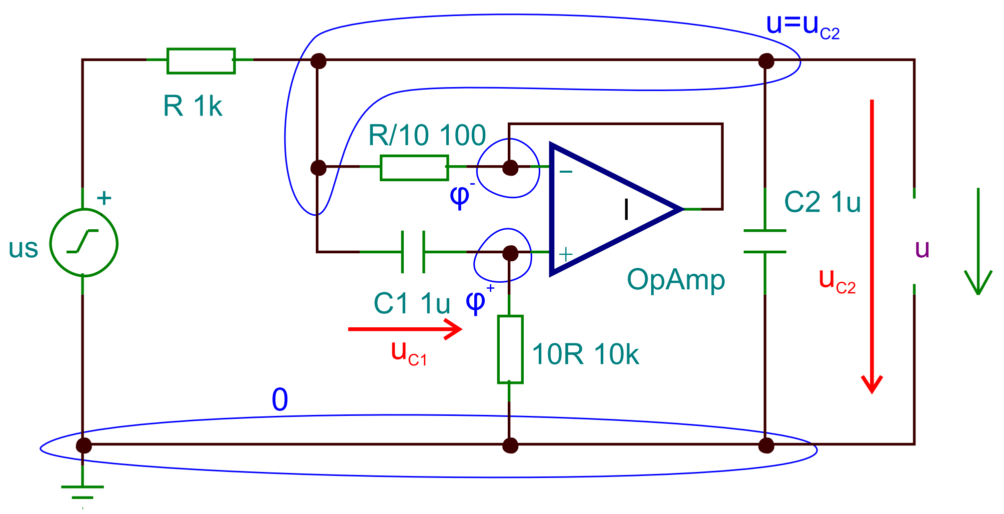
Mivel az ideális műveleti erősítő két bemeneti pontján a potenciál megegyezik, így az ábrán ((5.2.ábra 31.oldal)) jelölt φ^+ és φ^- jelölhető egyetlen φ változóval. Ezek után a felírható egyenletek:

$$\frac{u_{C2} - u_s}{R} + \frac{u_{C2} - \varphi}{R/10} + C \cdot \dot{u}_{C1} + C \cdot \dot{u}_{C2} = 0$$

$$C \cdot \dot{u}_{C1} - \frac{\varphi}{10R} = 0$$

$$u_{C2} - u_{C1} - \varphi = 0$$

Ha a feladatot MATLAB-ban szeretnénk megoldani, akkor elég sok lehetőségünk van erre. Mivel lineáris egyenletrendszernek tekinthetjük, ha a deriváltakat is külön változónak tekintjük, így berendezhetjük egy mátrixba őket, és megoldhatjuk mint egy aluldefiniált (több a változó, mint az egyenlet) egyenletrendszert. Én a feladat megoldása során a Symbolic Math Toolboxot használtam. Ez egy lecsupaszított Maple. A Toolbox automatikusan meghívódik, ha definiálunk szimbólumot. Az állapotváltozós leírás a következő néhány sorral elővarázsolható vele ebben a feladatban:



5.2. ábra. Harmadik mintafeladat kapcsolási rajza az állapotváltozók és a csomóponti potenciálok jelöléseivel

```
clear, clc
R = 1e3;
C = 1e-6;
syms uC1 uC2 us phi uC1d uC2d a b c t
eq1= '(uC2-us)/R+(uC2-phi)/(R/10)+C*uC1d+C*uC2d=0';
eq2= 'C*uC1d-phi/(10*R)=0';
eq3= 'uC2-uC1-phi=0';
phi=sym(solve(eq3,phi));
uC1d=eval(solve(eq2,uC1d))
uC2d=eval(solve(eq1,uC2d))
```

Az eredményünk:

```
uC1d =

100*uC2 - 100*uC1


uC2d =

1000*us - 1100*uC2 - 9900*uC1
```

A harmadik egyenlet pedig (ami a választ reprezentálja): $u = c_{C2}$. Ebből előállítható a mátrixos leírás:

```
A=  [-100 100; -9900 -1100];
B=  [0; 1000];
Ct= [0 1];
D=  [0];
```

Megjegyzés A koherens egységrendszernek ebben az esetben a prefixum nélküli egységeket választottam (Ω, F), így minden eredmény prefixum nélkül fog kijönni.

5.1.2. Aszimptotikus stabilitás

A sajátértékek meghatározása az `eig()` paranccsal történik:

```
lamb=eig(A)

    lamb =

  1.0e+002 *

  -6.0000 + 8.6023i
  -6.0000 - 8.6023i
```

Látható, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis (sajátértékek valós része negatív).

5.1.3. Impulzus válasz számítás

A számítást MATLAB környezetben sem ússzuk meg, itt is ki kell számítani az egyes mátrixok értékét, a végeredményt pedig kézzel kell egyszerűsíteni:

```
L1=[(A-lamb(2)*eye(2))/(lamb(1)-lamb(2))]
L2=eye(2)-L1
eat=exp(lamb(1)*t)*L1+exp(lamb(2)*t)*L2;
h=Ct*eat*B;
h=vpa(simplify(h))
```

Ennek eredménye:

```
    (13.51*(74.0*cos(860.23*t) - 43.01*sin(860.23*t)))/exp(600.0*t)
```

Ezt össze kell vonni egyetlen cos vagy sin taggá. Ennek néhány lépése (kihagytam a $\varepsilon(t)$ szorzótényezőt):

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{13.51\left(74\cdot\cos\left(860,23\cdot t\right)-43,01\cdot\sin\left(860,23\cdot t\right)\right)}{\mathrm{e}^{600\cdot t}} = \\ &= \left(999,74\cdot\cos\left(860,23\cdot t\right)-581,07\sin\left(860,23\cdot t\right)\right)\mathrm{e}^{-600\cdot t} = \\ &= \sqrt{999,74^2+581,07^2}\cdot\cos\left(860,23\cdot t+\arctan\left(\frac{581,07}{999,74}\right)\right)\mathrm{e}^{-600\cdot t} = \\ &= 1156,34\cdot\cos\left(860,23\cdot t+0,53\right)\cdot\mathrm{e}^{-600\cdot t} \end{aligned}$$

Néhány megjegyzés Mivel a sajátértékek komplexek, ezért a Lagrange-mátrixaink is komplexek. Ebből adódóan ha valaki kézzel kívánná kiszámítani, akkor a végeredménye komplexben:

$$h(t)=\varepsilon(t)\left(C_1\cdot\mathrm{e}^{\lambda_1\cdot t}+C_2\cdot\mathrm{e}^{\lambda_2\cdot t}\right)$$

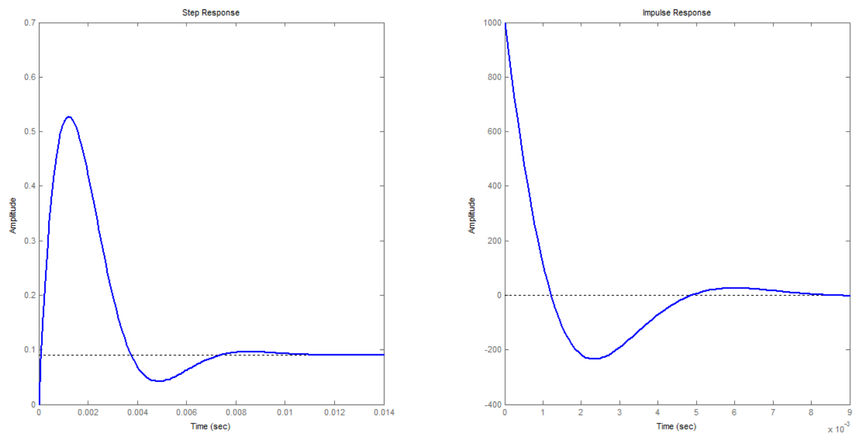
alakú lesz, ahol C_1 és C_2, illetve λ_1 és λ_2 párok komplex konjugált párok. Ennek a fizikai tartalmát úgy kapjuk meg, hogy az egyik tag kétszeres valós részét számítjuk ki. Például az első tagra:

- C_1 hossza lesz a cos tag szorzótényezője.

- C_1 szöge lesz a cos tag fázisa.
- λ_1 hossza lesz az exponenciális tag szorzótényezője.
- λ_1 szöge lesz a frekvencia.
- Ezek után az egész kifejezést megszorozzuk kettővel.

Ábrázolása Mindenki által jól ismert `impulse()` parancsot kell használni. De itt inkább megmutatom, hogyan kell egy ábrába belepakolni az impulzus és ugrásválaszt:

```
sys=tf(num, den)
figure(1)
hold on
subplot(1,2,1)
step(sys)
subplot(1,2,2)
impulse(sys)
```



5.3. ábra. A rendszer ugrás- és impulzusválasza

5.1.4. Ugrásválasz

Újra a „bűvképletet” kell alkalmaznunk, egyszerűen le kell integrálni paraméteresen (ez egy határozott integrál, aminek egyik határa egy paraméter). Az eredményünk:

$$g(t) = \varepsilon(t)\left(1,1029 \cdot \mathrm{e}^{-600 \cdot t} \sin\left(860,2 \cdot t - 0,0825\right) + 0,0909\right)$$

Ábrázolása együtt történt az impulzussal (5.3.ábra 33.oldal).

5.2. Frekvenciabeli vizsgálat

5.2.1. Átviteli karakterisztika

A MATLAB képes a rendszer számos reprezentációjának fogadására és konverziójára, így legegyszerűbb esetben alkalmazható az `ss2tf()` parancs, amely az állapotváltozós leírást (*StateSpace*) képes átviteli karakterisztikává (*TransferFunction*) alakítani. Ez sem teljesen igaz, mivel az állapotteres leírást alakítja át átviteli függvénnyé, de stabilis rendszerek esetében az eredmény ugyanaz. A mögötte lévő matematikai apparátus:

$$H(j\omega) = \mathbf{C}\left(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

A parancs használata és eredménye:

```
    [num, den]=ss2tf(A, B, Ct, D)

num =

  1.0e+004 *

         0    0.1000   10.0000

den =

  1.0e+006 *

    0.0000    0.0012    1.1000
```

A `num` és `den` vektorok a számláló és a nevező rendezett polinomjának tényezőit tartalmazzák. Sajnos ebben az esetben nem elégséges a négy tizedesjegy pontosság, de a változót meg tudjuk nézni pontosan is a *Workspace* tabon is. Az eredményünk:

$$H(j\omega) = \frac{0,01 \cdot j\omega + 1}{0,00001 \cdot (j\omega)^2 + 0,012 \cdot j\omega + 1}$$

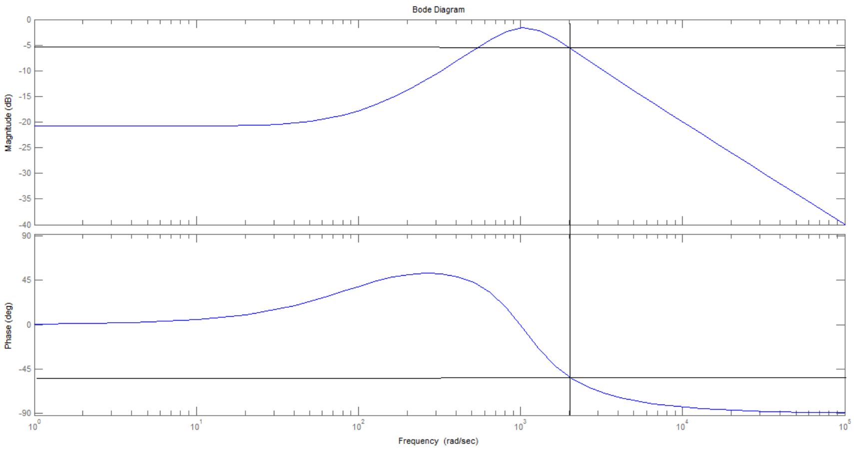
5.2.2. Bode és Nyquist diagram

Az ábrázolása a `bode()` és `nyquist()` parancsokkal történik, a frekvencia bejelölése legegyszerűbben a MATLAB-ban történhet vonalak és nyilak használatával. Az $\omega = 2000\,RAD/s$ frekvenciához tartozó jelöléseket mutatom be.

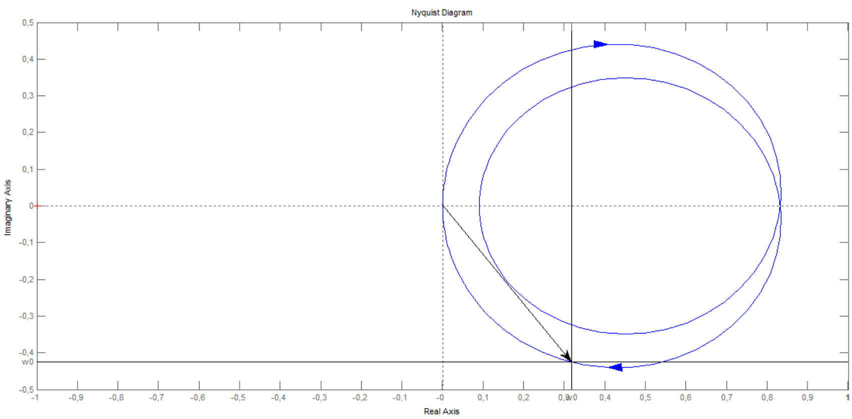
A harmadik feladatban körülbelül ennyit akartam leírni. A többi feladatot ugyanúgy csinálhatjuk meg, mint az eddigiekben.

5.2.3. Girátor

A feladatban egy girátor megvalósítást alkalmaztam. A földpotenciál és az u potenciál között elhelyezkedő műveleti erősítős kapcsolás gyakorlatilag egy girátor, mely a kapacitásból (C_1) egy veszteséges tekercset „transzformál”, melynek soros ellenállása $100\,\Omega$ és induktivitása $100 \cdot 10000 \cdot 10^{-6}\,H$.



5.4. ábra. z átviteli karakterisztika Bode diagramja



5.5. ábra. Az átviteli karakterisztika Nyquist diagramja

6. Dokumentálás

Erről is írok néhány sort, mert nem mindig egyértelmű, hogy pontosan mit is kell leírni és hogyan.

Véleményem szerint felesleges munka digitálisan megcsinálni a jelek 1 házit (persze jó ujjgyakorlat, ha LaTeX-ben írja az ember), és sok gyakvez nem is várja el a maximális pontszámhoz. Ami fontos, hogy minden benne legyen, ami ahhoz szükséges, hogy értékelni tudják a feladat megoldását. Ehhez pedig etalont képez a feldatlap. Érdemes néhányszor átolvasni, hogy az ember tudja, hogy pontosan mit kell leírnia.

Egy-egy feladat kidolgozását úgy kell megcsinálni, hogy benne legyen minden elméleti lépés és megfontolás. Fontos ezen túl, hogy az egyes feladatok közötti átmenet is tiszta legyen: az egyik feladat megoldása illeszkedjen a másik feladathoz (változók és számítások). Ha már nem kézzel csináltad, csak a feladat egy részét, akkor a nyomtatott tartalom mellékletként szerepeljen.

Ennek megfelelően egy tisztességes kézzel írt házi a következő elemekből áll:

- Az eredeti feladatlap kinyomtatott példánya,
- a feladatok kidolgozása kézzel (1., 2. és 3. feladat külön lapon kezdődik),
- a mellékletek (tipikusan az impulzus-, ugrásválasz, Bode- és Nyquist-diagram)

A mellékletekre hivatkozni kell a feladatok megoldása során.

Mivel kézzel írtad a házi jelentős részét, így arra rá kell szánni a kidolgozási időt: ha már beleölted a feladat megoldásába az időt, akkor legyen szép a dokumentációd.

És az ábrák... Egy-egy ábrába sok infót kell beleszorítani, szóval legyen szép nagy (egy A5-ös lapnyi terület általában elég). Nem kell színeket használni, de ha használsz, akkor ne pirosat (és plusz két szín elég is szokott lenni: fekete a rajz és az elemek jelölései, kékek a csomóponti potenciálok és hurkok, zöld az állapotváltozók és a válasz).

Jelöljük meg a választ. Ha van egy kérdés, hogy számítsa ki az átviteli karakterisztikát, akkor húzzuk alá az átviteli karakterisztikát. Ha egyértelművé teszed, hogy hol a megoldás, akkor nem kezdik ízekre szedni a feladat megoldásodat, csak ha nagyon nem stimmel az eredményed.

Ahol nem egyértelmű, oda írjunk mértékegységet. A koherens egységrendszer miatt elvileg nem kell sehova leírnod a mértékegységet, maximum, ha átváltottad, de azért ahol nem egyértelmű (például hibrid karakterisztika egyes elemei), oda írjuk ki zárójelezve.

És nagyjából ennyi: legyen oldalszámozás meg szép fejléc.

Dokumentációs példának szántam a második példát és ennek megfelelően is csináltam meg. Noha használtam benne piros színt és sok esetben nem írtam le a mértékegységeket, ettől függetlenül szerintem nagyjából ennyi kell egy J&R1 HF leadásához.

7. Összefoglalás

Ide már nem is jutott mit írni :-) Kicsit hosszúra sikerült így is a doksi, nem szántam 20 oldalnál hosszabbra. Aki idáig eljutott, remélem sok kérdésre tudtam válaszolni, és még több kérdést sikerült benne kelteni. Ha az ember rászánja az időt a házi kidolgozásra, sokat tanulhat belőle. Másrészről a jelek 1-2 tudás nagyon fontos, hogy nehogy elveszítsük a fonalat a többi tantárgynál. Szóval csak okosan!