Zárthelyi dolgozat

A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. Amennyiben egy feladat máshogy nem rendelkezik, a számszerű végeredményeket 4 tizedesjegyre kerekítsük, vagy normál tört alakban adjuk meg. Minden feladat 10 pontot ér. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

1. Egy urnában (kizárólag) kék, fehér és sárga golyók vannak, melyekből kihúzunk néhányat. Jelölje rendre K, F ill. S azokat az eseményeket, hogy a húzott golyók között van kék, fehér, ill. sárga. Fejezzük ki a fenti három esemény és a halmazműveletek segítségével a következő eseményeket. **A megadott kifejezések helyességének indoklása is szükséges.**

   a) Minden kihúzott golyó azonos színű.

   b) A kihúzott golyók színei közt a lehetséges háromból legalább kettő előfordul.

   c) A kihúzott golyók színei közt a lehetséges háromból pontosan kettő fordul elő.

2. Tegyük az alábbi 3 eseményt a bekövetkezésük valószínűsége szerint növekvő sorrendbe. Az választ részletes számolással támasszuk alá. Kivételesen ne kerekítsük az egyes valószínűségeket 4 tizedesjegyre, hanem számoljunk a feladat megoldásához szükséges pontossággal.

   A: Egy 32 lapos megkevert magyarkártya-pakliból találomra húzva 8 lapot, kihúzzuk az összes zöld lapot. (Egy magyarkártya-pakli 4 különböző szín mindegyikéből 8 darab lapot tartalmaz.)

   B: Ötös találatunk lesz az ötöslottón. (Az ötöslottón 90 számból húznak véletlenszerűen 5 darabot.)

   C: Tízszer egymás után hatost dobunk egy szabályos hat oldalú dobókockával.

3. Egy három tagú matematikuscsaládban a fiú megfigyelte, hogy mikor hazaér, az esetek 20%-ában senki nincs otthon, az esetek 50%-ában csak az édesanyja, a maradék esetekben pedig mindkét szülője. Tudja, hogy édesanyja az esetek 80%-ában magára zárja az ajtót; ha mindketten otthon vannak, akkor már csak az esetek 40%-ában zárják be, de ha nincs otthon senki, szórakozottságból akkor is az esetek 5%-ában nyitva marad az ajtó. A fiú egy délután hazaér, és zárva találja az ajtót. Mekkora a valószínűsége, hogy nincs otthon senki?

4. Tegyük fel, hogy egy számítógépes program kockadobást szimulál, valójában azonban nem egyenletesen véletlenszerűen generálja a kimenetelét, hanem a 6-os valószínűsége csak 0,15, míg az többi öt lehetséges kimenetel mindegyike ugyanazon valószínűséggel adódik. Adjuk meg a program kimenetelének várható értékét és szórását.

5. Legyen $X \sim Bin(n;p)$ egy binomiális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X \geq 3)$ valószínűséget, ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 3$ és $\mathbb{D}(X) = 1{,}5$.

6. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két érték hiányzik. Határozzuk meg a hiányzó értékeket, ha tudjuk, hogy az $\{X = 2\}$ és $\{Y = 0\}$ események függetlenek.

Y \ X	0	1	2
0	1/10	1/5	
2		1/4	1/5

Nevezetes eloszlások táblázata

Eloszlás neve	Jelölés	ran$X$	$f_X(k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$1-p,\ p$	p	$p(1-p)$
binomiális	$Bin(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
geometriai	$Geo(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$