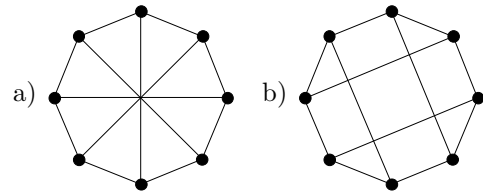


1. Létezik-e olyan fa, melyben a pontok foka rendre 1,1,1,1,1,3,4, illetve 1,1,1,1,2,3,3,4?

2. Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a kockában él mentén szomszédosak. A jobbra látható két gráf közül melyik (melyek) izomorf(ak) G -vel?



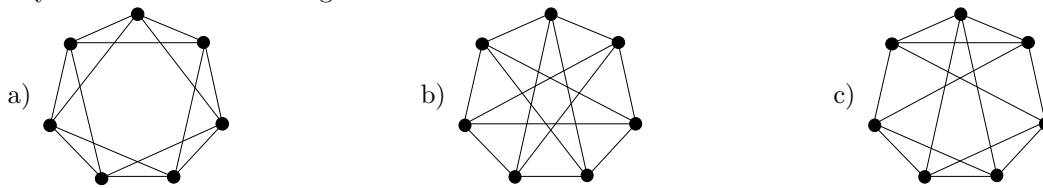
3. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Mutassuk meg, hogy a gráf összefüggő.

4. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $n = 5, e = 2$ | b) $n = 5, e = 3$ |
| c) $n = 4, e = 5$ | d) $n = 5, e = 7$ |

ahol n jelöli a pontok számát, e az élek számát.

5. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



6. a) Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokúak száma 5?

b) Rajzoljunk három olyan, a feltételeknek megfelelő fát, melyekben a 2 fokú pontok száma különböző.

7. Egy 20 csúcsú, 3 komponensű gráfnak 18 éle van. Mutassuk meg, hogy a komponensek közül pontosan kettő fa.

8. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen. (ZH, 2006. december 7.)

9. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, melyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) összefüggő gráfot kapunk.

10. Egy 3×3 -as sakktábla oszlopaait betűzzük (balról jobbra) az A, B, C betűkkel, sorait számozzuk (alulról fölfelé) az 1, 2, 3 számokkal. A táblán az A2 és C2 mezőkön áll egy-egy világos huszár, a B1 és B3 mezőkön egy-egy sötét huszár. A huszárak a sakk szabályai szerinti lépéseket tehetnek, egy mezőn egyszerre csak egy bábu állhat. Elérhető-e, hogy végül a világos huszárak az A2 és B1, a sötétek a B3 és C2 mezőkön álljanak?

11. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

- | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) 1,2,2,3,3,3; | b) 1,1,2,2,3,4,4; | c) 2,3,3,4,5,6,7; | d) 1,3,3,4,5,6,6? |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|

12. Rajzoljuk le az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

13. Milyen n számokra létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs foka különböző?

14. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a gráfnak van három különböző feszítőfája. (ZH, 2017. május 8.)

15. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf, e és f pedig G két éle. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan feszítőfája, mely e -t és f -et is tartalmazza.

16. Létezik-e olyan 4, 5, illetve 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a saját komplementerével?

17. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.

18. Hány különböző, páronként nem izomorf 50 csúcsú és 1223 élű egyszerű gráf létezik?

19. Az n csúcsú G gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma k . Hány éle van G -nek?

20. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

21*. Egy $n \geq 3$ csúcsú teljes gráf éleit valaki megszínezte n különböző színnel. Mutassuk meg, hogy a csúcsok közül kiválasztható 3 úgy, hogy az általuk meghatározott 3 él közül bármely kettő különböző színű.