

① A rászédett NST-óra pesszimista geom. eloszlású $p = \frac{1}{10}$ paraméterrel,

$$\text{vagyis } p_k = P(N=k) = \left(\frac{9}{10}\right)^k \cdot \frac{1}{10} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

b.) Legyen X_i az i -edik rászédett kör, így a teljes kör

$$S = \sum_{i=1}^N X_i. \quad \text{Ehnek várható értéke a TVET szerint millió Ft-ben}$$

$$\begin{aligned} E[S] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) E(S|N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k E X_1 = E X_1 \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E X_1 \cdot EN = \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right) = \underline{\underline{9}} \end{aligned}$$

② N = a megjelentek száma, $N \sim \text{Bin}(n=300, p=\frac{2}{3})$, $q = \frac{1}{3}$

$\{S_i\}$ = az i -edik hallgató pontszáma $\{S_i\} \sim \text{Unif}\{0,1,2,3,4,5\}$

$X = \sum_{i=1}^N S_i$ véletlen tagok összege

Generátorfüggvény, momentumok: $g_{S_i}(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{6}$, $E S_i = \frac{5}{2}$, $\text{Var } S_i = \frac{35}{12}$

$$\text{Var } S_i = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}{6} = \frac{1+9+25}{6 \cdot 2} = \frac{35}{12}$$

$$g_N(z) = (q + pz)^n, \quad EN = pn = 200; \quad \text{Var } N = npq = \frac{200}{3}$$

a.) $g_X(z) = g_N(g_{S_i}(z)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{6}\right)^{300}$

b.) $EX = EN E S_i = 200 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{500}}$

c.) $\text{Var } X = EN \text{Var } S_i + \text{Var } N (E S_i)^2 = 200 \cdot \frac{35}{12} + \frac{200}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{35+25}{12} \cdot 200 = \underline{\underline{1000}}$

③ $g(z) = \frac{1}{6 \cdot 5z}$, $g'(z) = \frac{+5}{(6 \cdot 5z)^2}$, $g''(z) = \frac{2 \cdot 25}{(6 \cdot 5z)^3}$

a.) $EX = g'(1) = 5$

b.) $E(X^2 - X) = g''(1) = 50 \Rightarrow EX^2 = 50 + 5 = 55$, $\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2 = 55 - 25 = 30 = \boxed{DX = \sqrt{30}}$

c.) $P(X=0) = g'(0) = \frac{1}{6}$ (Megj: $X \sim \text{Pessz. Geom. } (p = \frac{1}{6})$.)

d.) $P(X=1) = g''(0) = \frac{5}{36}$

① ~~X~~ X := amit Morica dobott; Y := amit Pistike dobott.

~~$P(X < Y) = \sum_{k=1}^6 P(X=k) P(Y > X | X=k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} P(Y > k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{0}{6} \right) = \frac{15}{36}$~~

~~$P(X < Y)$~~
 $P(X < Y) \stackrel{TUT 6}{=} \sum_{k=1}^6 P(Y=k) P(X < Y | Y=k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} P(X < k) = \frac{1}{6} \left(\frac{0}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} \right) = \frac{15}{36}$

a.) $P(Y=6 | X < Y) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(Y=6) P(X < Y | Y=6)}{\sum_{k=1}^6 P(Y=k) P(X < Y | Y=k)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{3}$

b.) $E(Y | X < Y) = \sum_{k=1}^6 k P(Y=k | X < Y) \stackrel{\text{mit az előző}}{=} \sum_{k=1}^6 k \frac{\frac{1}{6} \cdot k-1}{\frac{15}{36}} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Acsoy: Y valószínűsége annak, hogy X < Y feltétel mellett

k	2	3	4	5	6
P _k	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

$\Rightarrow P(Y=6 | X < Y) = \frac{5}{15}$; $E(Y | X < Y) = \frac{1}{15} \cdot 2 + \frac{2}{15} \cdot 3 + \frac{3}{15} \cdot 4 + \frac{4}{15} \cdot 5 + \frac{5}{15} \cdot 6 = \frac{70}{15}$

② X := a 10:00:00 és 10:02:00 között érkező hívások száma

Y := a 10:02:00 és 10:03:00 között érkező hívások száma

Z := a 10:00:00 és 10:03:00 között érkező hívások száma

a.) $X \sim \text{Poi}(6) \Rightarrow P(X=0) = e^{-6} \approx 0.0025$

b.) $Y \sim \text{Poi}(3)$ és X-től független $\Rightarrow P(X=0, Y \geq 3) = P(X=0) [1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2))]$
 $= e^{-6} \left[1 - e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} \right) \right] = e^{-6} \left[1 - \frac{17}{2} e^{-3} \right] \approx 0.0014$

c.) $Z \sim \text{Poi}(3 \cdot \frac{1}{3}) = \text{Poi}(1) \Rightarrow P(Z=0) = e^{-1} \approx 0.368$

③ $Z_n := a$ level példányokra az n -edik generációban.

Z_n elágazó folyamat, az 1-lépéses átfordításm-eloszlás: $P_k \mid 0 \mid 10$

$\Rightarrow m = \sum_k k p_k = 1$, a folyamat kritikus. Ezért

a.) $P(\text{kihalás}) = 1$

b.) $E\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \infty$