1999.IX.16.

1. Gyakorlat

1. A G gráf pontjai egy 8-elemű halmaz 2-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e G-ben Euler-, ill. Hamilton-kör?

2. Milyen n es m értékekre tartalmaz
   (a) Euler-kört, ill. utat,
   (b) Hamilton-kört, ill. utat
   az $n * m$ méretű kockás papír (melynek összesen $(n+1) * (m+1)$ pontja van)?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor az élei irányíthatók úgy, hogy minden pont ki- és befoka azonos legyen!

4. Egy összefüggő G gráfban $2k$ $(k \geq 1)$ pontnak van páratlan foka. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab diszjunkt élsorozat uniójaként. Előállítható-e kevesebb élsorozat felhasználásával is?

5. Egy oktaéder minden lapjára egy-egy azonos alapméretű tetraédert illesztünk. Van-e az így keletkezett test éleiből álló gráfban Hamilton-út?

6. Egy $2n-1$ pontú gráf minden pontjának a foka legalább $n-1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik a gráfban Hamilton-út!

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráfban létezik Euler-kör, akkor az élgráfjában, $L(G)$-ben létezik Hamilton-kör! Igaz-e az állítás megfordítása?

2. Feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban $\nu(G) = |A| - \max_{X \subseteq A}\{|X| - |N(X)|\}$!

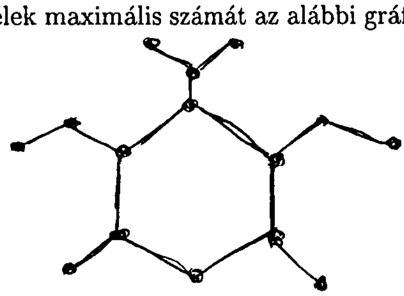
2. Bizonyítsuk be Frobenius eredeti tételét: egy $n \times n$-es determináns kifejtésében akkor és csakis akkor lesz minden tag 0, ha létezik ~~egy~~ $k \times (n-k+1)$-es részmátrix valamely $1 \le k \le n$-re!
csupa 0

3. (a) Hány teljes párosítás lehet egy fában?
(b) Adjunk meg (további) olyan gráfokat, amelyekben pontosan egy teljes párosítás van. (Van-e olyan is, amelyikben minden pont foka legalább 2?)

4. (a) Mutassuk meg, hogy r-reguláris páros gráf biztosan teljesíti a Hall–feltételt! (**Következmény**: r–reguláris páros gráfnak mindig van teljes párosítása.)
(b) Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráfban minden pont foka $\le r$, akkor pontok és élek hozzávételével kiegészíthető olyanná, amelyben minden csúcsra pontosan r él illeszkedik!
(c) Legyen a G egyszerű, páros gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be, hogy van olyan párosítás G-ben, amely lefedi az összes k fokú pontot!
(d) Legyen $r \ge 2$ és tekintsünk egy r-reguláris páros gráfot. Hagyjunk el az ennek egyik tetszőlegesen kiválasztott csúcsából kiinduló r él közül tetszőlegesen kiválasztott $(r-1)$-et. Az így megmaradó gráf legyen G. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!

5. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak (egy ember több bizottságnak is tagja lehet) és most minden bizottság a saját tagjai közül egy-egy elnököt szeretne kinevezni. Bármely bizottság bármely tagja alkalmas lenne elnöknek, de nem akarják, hogy valaki egyszerre több bizottságnak is elnöke legyen. Mikor valósítható ez meg?

6. Határozzuk meg a független élek maximális számát az alábbi gráfban! Bizonyítsuk is be, hogy nem lehet többet találni!



7. (a) Mutassuk meg, hogy a $\frac{\tau(G)}{\nu(G)}$ hányados lehetséges legnagyobb értéke (az összes véges egyszerű G gráfot tekintve) 2-vel egyenlő.
(b) Legyen $\Delta(G)$ egy gráfban a maximális fokszám. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \ge |E(G)|$!
(c) Bizonyítsuk be, hogy egy hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \ge |E(G)|$!

8. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

9. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, páros gráf, amelynek mindkét pontosztályában n pont van. Az egyik osztályban minden pont foka különböző. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!

10. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban az A független halmazba eső $X = \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ részhalmaz összes csúcsa lefedhető egyetlen M párosítással. Hasonlóképp, létezik olyan M' párosítás, amely az $Y = \{b_1, b_2 \ldots b_m\} \subseteq B$ részhalmazba eső összes csúcsot fedi. Bizonyítsuk be, hogy ekkor olyan M'' párosítás is létezik, amely az $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ pontok mindegyikét lefedi.

11. Mennyi lehet legfeljebb egy 2n csúcsú, egyszerű összefüggő G gráf klikkszáma, ha nincs G-ben teljes párosítás?

12. (a) Egy $2n$ pontú gráf minden pontjának a foka legalább n. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van benne teljes párosítás.
(b) A $2n$ csúcsú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább n. Igazoljuk, hogy $\tau(G) \ge n$.

1999.IX.30.

3. Feladatsor

1. Legyenek G csúcsai a sakktábla mezői, és két csúcs pontosan akkor legyen összekötve, ha a megfelelő mezők bástyával egy lépésben elérhetők egymásból. Mennyi az így keletkezett gráf kromatikus száma?

2. Legyenek G csúcsai az összes természetes számok és legyen az n és m csúcs éllel összekötve pontosan akkor, ha $n+m$ páratlan. Határozza meg $\chi(G)$-t!

3. (a) Bizonyítsuk be, hogy minden gráfban $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$!
   (c) Egy $G_1 = (V, E_1)$ és $G_2 = (V, E_2)$ gráf uniója a $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$!
   (d) Hogyan következik a (b) feladat a (c)-ből?

4. (a) Legyen a G gráf pontjainak fokszámsorozata $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 1 + \max_i\{\min\{d_i, i-1\}\}$!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy minden gráfnak sorba rendezhetők úgy a pontjai, hogy ha ebben a sorrendben színezzük a gráfot mohó algoritmussal, akkor $\chi(G)$ színt használunk!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű gráfban $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$. Mutassunk példát olyan gráfra, ahol ez egyenlőséggel teljesül.

6. Igaz-e, hogy ha egy G gráf $\chi(G)$ kromatikus számára és $\omega(G)$ klikkszámára teljesül, hogy $\chi(G) > \omega(G)$, akkor behúzhatók G-be új élek úgy, hogy a keletkező G' gráfra $\chi(G) = \chi(G') = \omega(G')$ teljesüljön?
   Igaz-e, hogy ez mindig elérhető legfeljebb 100 új él hozzáadásával?

7. Legyen a G gráf pontjainak fokszámsorozata $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 1 + \max_i\{\min\{d_i, i-1\}\}$!

8. Legyen G olyan gráf, melyre $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n csúcsú egyszerű reguláris gráf, akkor $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. ($\overline{G}$ a G gráf komplementerét jelöli.)

10. Egy négyzetrácsban legyen egy lépés, hogy egy négyzetből átmehetünk egy vele közös éllel rendelkező négyzetbe. A 100-szor 100-as rácsban mi az a legkevesebb szín, amivel a négyzetek kiszínezhetők úgy, hogy az egymásból pontosan két lépéssel elérhető négyzetek színe különböző?

4. Feladatsor

1. Mennyi $\chi_e(K_{2n+1})$ és $\chi_e(K_{2n})$?
2. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G) \geq e/\nu(G)$ minden e élű egyszerű G gráfra (ahol $\chi_e(G)$ a G gráf élkromatikus száma, $\nu(G)$ pedig a független élek maximális száma G-ben)!
3. Lássuk be, hogy egy páratlan kör komplementere nem perfekt!
4. Bizonyítsuk be, hogy minden G páros gráf élgráfjának a komplementere ($\overline{L(G)}$) perfekt!
5. Egy gráfot összehasonlítási gráfnak nevezünk, ha élei tranzitívan irányíthatóak, azaz ha $(x, y) \in E$ és $(y, z) \in E$, akkor $(x, z) \in E$ is teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy az összehasonlítási gráfok perfektek!
6. Egy iskolában n diákból k különféle bizottságot választottak (egy ember több bizottságnak is tagja lehet). Ezt a helyzetet egy $k \times n$-es mátrixszal reprezentálhatjuk: az i. sor j. helyén 1 áll, ha a j. diák benne van az i. bizottságban, és 0, ha nem. Mi a BB^T mátrix (i, j)-edik elemének a jelentése?
7. Mennyi a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ mátrix deterninánsa?
8. Legyen G olyan gráf, melyben az összes feszített részgráfra igaz, hogy abban minden tartalmazásra nézve maximális (tehát nem bővíthető) klikknek van közös pontja az adott részgráf összes tartalmazásra nézve maximális független halmazával. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.
9. Egy egyszerű, összefüggő G gráf élkromatikus száma kisebb a benne található legnagyobb klikk méreténél (vagyis $\omega(G)$-nél). Bizonyítsuk be, hogy G teljes gráf!
10. Legyen G egy 10-reguláris egyszerű gráf, melynek 1999 csúcsa van. Mennyi a $\chi'(G)$ élkromatikus szám értéke?
11. (a) A síkot véges sok mindkét irányban végtelen egyenes elhelyezésével „országokra" bontjuk. Mutassuk meg, hogy ez a „térkép" 2 színnel megszínezhető!
    (b) Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai pontosan akkor színezhetők 2 színnel, ha minden pont foka páros!

1999.X.14.

5. Feladatsor

1. Lássuk be, hogy egy egyszerű irányítatlan gráf akkor és csak akkor páros, ha szomszédossági mátrixának minden páratlan kitevőjű hatványában minden diagonál-elem zérus!

2. Legyen A és B egy hurokél-mentes irányított gráf szomszédossági, ill. illeszkedési mátrixa. Mi mondható a $BB^T - A$ mátrixról?

3. Az alábbi mátrixok közül melyek állnak elő gráfok körmátrixaként?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Hogyan ismerhető fel egy hurokél vagy egy elvágó él egy — valamelyik mátrixával adott — gráfban?

5. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges irányított gráfban nincs irányított kör, akkor van forrás és nyelő!
   b) Példán illusztráljuk, hogy az előző állítás végtelen gráfokra nem feltétlenül igaz.
   c) Ellenpéldával mutassuk meg, hogy az a) állítás nem fordítható meg.

6. Határozzuk meg az ábrán látható gráf által szemléltetett tevékenységekhez szükséges időt! Mely részfeladatok kritikusak?

7. Határozzuk meg x függvényében az ábrán látható gráfok által szemléltetett tevékenységhez szükséges időt. ($x \geq 0$) Mely részfeladatok kritikusak?

8. Maximum hány éle lehet egy n pontú, irányított kört nem tartalmazó egyszerű gráfnak?

9. Legyen egy n-elemű halmaz összes (azaz hány darab?) részhalmaza egy G_n irányított gráf ponthalmaza, és az X, Y részhalmazának megfelelő x, y pontok között akkor és csak akkor vezessen él, ha $X \subset Y$ és $|X| + 1 = |Y|$. Mutassuk meg, hogy G-ben nincs irányított kör, majd adjuk meg mind maximális számú, mind minimális számú emeletekre való bontását.

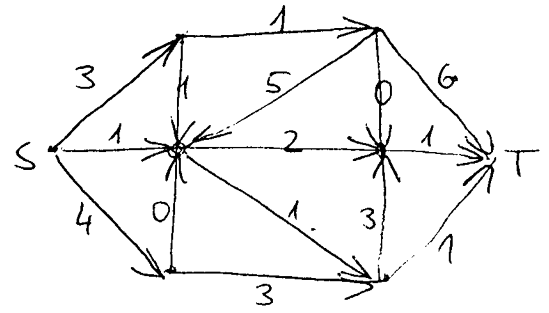
10. Legyen A az n csúcsú G egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixa. Mi a G gráf, ha tudjuk, hogy az $A + A^2$ mátrix minden eleme azonos?

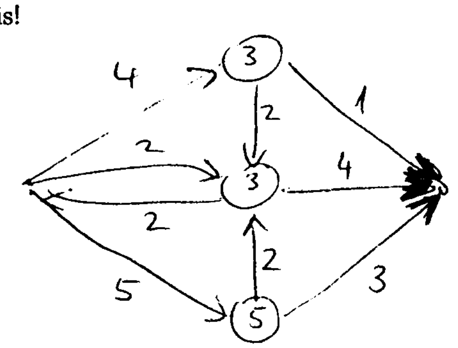
11. Bizonyítsuk be, hogy egy irányított gráf illeszkedési mátrixának minden négyzetes részmátrixára a determináns 0 vagy ± 1!

6. Feladatsor

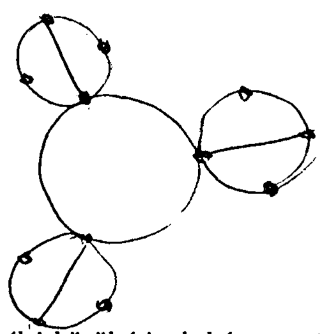
1. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az 1. ábrán látható hálózati folyamon és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális!

2. Határozzuk meg a maximális folyam értékét a 2. ábrán látható pont- és élkapacitásokkal ellátott hálózati folyamon és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális!

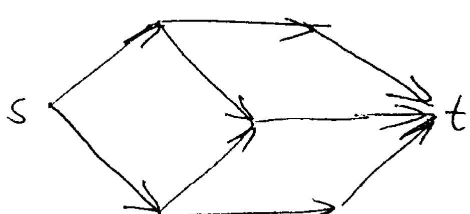




3. (a) Mekkora az ábrán látható gráfban a két pont között az él–, ill. pontdiszjunkt utak maximális száma?
   (b) Hányszorosan (pont)összefüggő, és hányszorosan élösszefüggő ez a gráf?



4. Az ábrán látható gráf élei közül írjunk háromra 1 kapacitást, háromra 2-t és háromra 3-at úgy, hogy a maximális folyam a lehető legnagyobb illetve a lehető legkisebb legyen!



5. Mutassuk meg, hogy egy k-szorosan összefüggő n-pontú gráfnak legalább $kn/2$ éle van. ("pontösszefüggő")

6. (a) Igaz-e, hogy ha minden él kapacitása páros szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páros szám?
   (b) Igaz-e ugyanez páratlan számokkal?

7. Bizonyítsuk be, hogy 3–reguláris gráfokra a pont– és élösszefüggőségi számok egyenlőek.

8. (a) Bizonyítsuk be a Ford-Fulkerson (maximális folyam=minimális vágás) tételből a Hall–tételt páros gráfokra!
   (b) Bizonyítsuk be a(z egyik) Menger tételből a König–tételt páros gráfokra ($\nu = \tau$)!

3. a) G k-pontöf $\longrightarrow$ k élöf
   b) $\not\longleftarrow$

7. Feladatsor

1. a) Hány éle van a $T_{n,k}$ Turán-gráfnak, ha k osztója n-nek?
   b) Hány éle van $T_{n,2}$-nek?

2. Bizonyítsuk be, hogy a $T_{n,k}$ Turán-gráf minden G részgráfjára $\chi(G) \leq k$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\chi(G) = k$, akkor elég nagy n-re G részgráfja lesz a $T_{n,k}$ Turán-gráfnak.

4. Ha C_k jelöli a húr nélküli k hosszú kört, akkor mennyi a következő határérték

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n, C_{1999})}{\binom{n}{2}} = ?$$

5. Tudjuk, hogy a 3 dimenziós térben legfeljebb 4 különböző pont adható meg úgy, hogy közülük bármely kettőnek ugyanakkora legyen a távolsága. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is veszünk fel 70 különböző pontot a térben, közöttük biztosan előfordul legalább háromféle különböző távolság.

6. a) A sík pontjait kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szabályos háromszög, amelynek minden csćsa azonos színű!
   b) Igaz marad-e az állítás, ha a sík pontjait tetszőleges, de véges sok színnel színezzük ki?

7. Adott a síkon n nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható éppen egységnyi távolságra levő pontpárok száma?

8. Minimálisan hány éle kell, hogy legyen egy 2000 csúcsú G gráfnak, ha függetlenségi számára $\alpha(G) = 5$ teljesül?

9. Igazoljuk, hogy ha az n csúcsú egyszerű G gráf éleinek száma $\frac{n^2}{4} + 1$, akkor G tartalmaz legalább két (nem feltétlenül diszjunkt) K_3 részgráfot.

10. Bizonyítsuk be, hogy $|E(T_{n,k-1})| = |E(T_{n-(k-1),k-1})| + (n - (k-1))(k-2) + \binom{k-1}{2}$.

11. Egy legalább 4 fős munkahelyen bármely két ember vagy jóban, vagy rosszban van egymással, vagy nem ismerik egymást, és mindegyik eset elő is fordul. Bizonyítsuk be, hogy van 4 olyan ember, akik között mindhárom viszony előfordul!

12. a) Bizonyítsuk be, hogy $R_s(k_1, k_2, k_3 \ldots, k_s) \leq R_{s-1}(R(k_1, k_2), k_3 \ldots, k_s)$.
    b*) Bizonyítsuk be, hogy $R^3(k,l) \leq R(R^3(k-1,l), R^3(k,l-1))$.

1999.XI.11.

8. Feladatsor

1. Ha b osztója a-nak, mik a lehetséges értékei a $d(a, a+b)$, és a $d(2a, a-b)$ legnagyobb közös osztóknak?

2. Legyen a és b páratlan. Mennyi $d(a^2 + b^2, 4)$?

3. Van-e olyan a, b pár, hogy $d(a, b) = 3$ és $a + b = 100$? És olyan, hogy $d(a, b) = 5$ és $a + b = 100$? Ahol igen, ott hányféle?

4. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy $d(n + 1) \geq 2d(n)$.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden a egészre $d(a) \leq 2\sqrt{a}$!

6. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p + 10$ és $p + 14$ is prímszám?

7. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n prím!
   b) Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n kettőhatvány!

8. Jelölje F_k a k-adik Fibonacci-számot, azaz legyen $F_1 = F_2 = 1$, és ha $n > 2$, akkor $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Található-e olyan k, hogy F_k és F_{k+2} is osztható hárommal?

9. Egy 2000-ben születő embernek 90 éves koráig hány olyan születésnapja lesz, amikor az életkora osztója az aktuális évszámnak?

10. Maximum hány szám választható ki 1-től $2n$-ig úgy, hogy közülük semelyik kettő se legyen relatív prím?

11. Legyen n pozitív egész szám, melynek ismerjük $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ prímtényezős felbontását.
    a) Mennyi a
    $$\sum_{d_i | n} d_i$$
    érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztóinak az összege?
    b) Mennyi a
    $$\sum_{d_i | n} \frac{1}{d_i}$$
    érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztói reciprokának az összege?

12. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b egészre $d(ab) \leq d(a)d(b)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b relatív prímek!

1999.XI.18.

9. Feladatsor

1. Döntsük el, hogy megoldhatóak-e az alábbi kongruenciák, és a megoldhatókat oldjuk meg:
   (a) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
   (b) $ax \equiv 3 \pmod{21}$ ha $a = 6, 7$ vagy 8.
2. Keressük meg 7 azon pozitív többszöröseit, melyek 13-mal osztva 11-et adnak maradékul!
3. Bizonyítsuk be, hogy $37^{16} - 1$ osztható 5-tel!
4. Milyen maradékot ad 103-mal osztva $205^{206^{207}}$?
5. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 + 41n$ osztható 42-vel, ha n tetszőleges egész szám!
6. Határozzuk meg 303^{404} utolsó két számjegyét!
7. a) Mi lehet a, ha $a^{1993} \equiv 5 \pmod{21}$?
   b) Mi lehet a, ha $a^{1995} \equiv 5 \pmod{21}$?
8. Bizonyítsuk be, hogy $1998! + 111^{1998}$ osztható 1999-cel!
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges prímre $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$!
10. Legyen p egy $4\,k+3$ alakú prím. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan a szám, melyre $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ teljesülne!
11. a) Milyen n-ekre teljesül $2\varphi(n) = n$?
    b) Milyen n-ekre teljesül $\varphi(7n) = 7\varphi(n)$?
    c) Milyen n érték(ek)re igaz, hogy $\phi(n)$ páratlan szám?
    d) Mely n számokra lesz $\varphi(n)$ prímszám?
12. Legyen $n > 1$ egész szám. Mutassuk meg, hogy ha összeadjuk az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egész számokat, akkor az összeg $\frac{n\,\phi(n)}{2}$ lesz!

1999.XI.25.

10. Feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy 561 Carmichael szám (segítségül: prímtényezős felbontása $3 \cdot 11 \cdot 17$).
2. Határozzuk meg a dekódolófüggvényt a $C(x) = y$, $y \equiv x^5 \pmod{299}$ RSA-kódolófüggvényhez!
3. Aliz és Béla telefonon keresztül sakkoznak. Ha a játszma függőben marad és mondjuk Aliz következik, az utolsó lépést „borítékolnia" kell. (Ha nem tennék, akkor valamelyiküknek egy extra nap gondolkodási ideje lenne.) Hogyan lehet „borítékolni" telefonon keresztül? (Egyrészt Béla nem tudhatja másnapig, hogy mi a lépés. Másrészt Aliz közben rájöhetne, hogy mást kellett volna lépnie, ezért Béla másnap egy Aliztól kapott újabb információval már „ki tudja nyitni" a borítékot.)
4. Határozzuk meg $(n-1)!$ n-nel vett osztási maradékát minden n egész számra!
5. Bizonyítsuk be, hogy a $p = 4k + 1$ alakú prímszámokra a -1 négyzetelem, azaz van olyan egész szám, aminek a négyzete -1 maradékot ad p-vel osztva!
6. Legyenek egy gráf pontjai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Legyen F_n a maximális folyam értéke $s = (0, \dots, 0)$ és $t = (1, \dots, 1)$ között. Mennyi F_3? Mennyi általában F_n?
7. Milyen a, b számokra van olyan gráf, ami a-szorosan pontösszefüggő, és b-szeresen élösszefüggő?
8. Legyen p 2-hatvány, q pedig 5-hatvány. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan k és l pozitív egészek, hogy ha egy p-fejű sárkány minden fejének k darab és egy q-fejű sárkány minden fejének l darab almát adunk, akkor az egyik sárkány pontosan eggyel több almát kap, mint a másik!
9. Milyen maradékot ad 37-tel osztva az a szám, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja 37 darab egyesből áll?

10.) Milyen maradékot ad 9-cel osztva $16^{17^{18}}$?

1999.XII.2.

11. Feladatsor

1. Csoportot alkotnak-e az adott halmazok az adott műveletekre nézve?
   (a) (páros számok, $+$),
   (b) (páros számok, $\times$),
   (c) (pozitív számok, $+$),
   (d) (egy csomag kártya keverései, kompozíció),
   (e) (mod n maradékosztályok, $+$),
   (f) (mod n maradékosztályok, $\times$).

2. Határozzuk meg a következő alakzatok szimmetriacsoportját (ill. annak műveleti tábláját):
   (a) téglalap,
   (b) rombusz,
   (c) négyzet,
   (d) ...**FFFFFF**... (mindkét irányban végtelen sor).

3. (a) Hány részcsoportja van a 12 rendű ciklikus csoportnak?
   (b) Hány normálosztója van a 12 rendű ciklikus csoportnak?
   (c) Mik az egyes elemek rendjei a 12 rendű ciklikus csoportban?
   (d) Hány olyan eleme van a C_n ciklikus csoportnak, ami egymaga generálja a teljes C_n csoportot?
   (e) Mik a végtelen ciklikus csoport részcsoportjai, ill. elemeinek rendjei?

4. Egy csoportban az a elem rendje 10.
   (a) Mekkora a $b = a^3$ elem rendje?
   (b) Mekkora a $b = a^{12}$ elem rendje?

5. (a) Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban egy elem rendje megegyezik az inverzének a rendjével!
   (b) Legyen a es b egy csoport két tetszőleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy ab es ba rendje megegyezik!
   (c) Bizonyítsuk be, hogy a és $b^{-1}ab$ rendje is megegyezik!
   (d) Bizonyítsuk be, hogy egy Abel-csoportban két elem szorzatának a rendje nem lehet nagyobb, mint a két elem rendjének szorzata!

6. Jelölje $(G_1, *)$ és $(G_2, *)$ a $(G, *)$ csoport két különböző részcsoportját ($*$ a művelet).
   (a) Igaz-e, hogy $(G_1 \cup G_2, *)$ is részcsoport?
   (b) Igazoljuk, hogy $(G_1 \cap G_2, *)$ is részcsoport.

7. Legyen H a G csoport részcsoportja és g a csoport egy tetszőleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy $g^{-1}Hg$ is részcsoport!

8. Tekintsük az $f(x) = ax + b$ alakú lineáris függvényeket, ahol a nem nulla valós, b tetszőleges valós szám. Legyen a $\circ$ művelet a függvények összetétele, azaz $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Igazoljuk, hogy erre a műveletre nézve az adott függvények csoportot alkotnak! Mi a csoport egységeleme?

9. Mutassuk meg, hogy az olyan kétszer kettes valós A mátrixok, amelyekben a két főátlóbeli elem 1-gyel egyenlő, a bal alsó sarokban pedig 0 áll (tehát $A_{1,1} = A_{2,2} = 1$, $A_{2,1} = 0$ és $A_{1,2}$ tetszőleges valós szám) csoportot alkotnak a mátrixszorzás műveletére nézve!

10. Legyen G kommutatív csoport és k rögzített pozitív egész szám. U jelölje G azon elemeinek halmazát, amelyek előállnak valamely G-beli elem k-adik hatványaként, vagyis
$$U = \{u \in G : \exists g \in G, g^k = u\}.$$
    Mutassuk meg, hogy U részcsoport G-ben!

11. Mutassuk meg, hogy a mod 9 redukált maradékosztályok a szorzásra nézve ciklikus csoportot alkotnak!

12. Feladatsor

1. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív!

2. Tudjuk, hogy a G csoport rendje 100, a g elemére pedig teljesül, hogy $g^{21} = e$. Mit mondhatunk g-ről?

3. (a) Legyen G egy csoport, és a egy eleme. Igazoljuk, hogy a^k rendje, ahol k tetszőleges egész szám, osztója a rendjének!
(b) Legyen G egy legalább kételemű véges csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan eleme, melynek rendje prímszám!

4. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó!

5. Jelentse $|a|$ az a valós szám abszolút értékét. Homomorfizmus-e az adott csoporton az $a \mapsto |a|$ leképezés, ha
(a) a csoport: a nem nulla valós számok a szorzásra nézve;
(b) a csoport: a valós számok az összeadásra nézve?
Ha igen, mi lesz a leképezés képe és mi a magja, és mik lesznek a mag szerinti mellékosztályok?

6. Legyen G az egész számok csoportja az összeadásra nézve, m pedig egy rögzített egész szám. Homomorfizmus-e ezen a csoporton a $\varphi(n) =$ 'n-nek m-mel vett osztási maradéka' leképezés? Ha igen, mi lesz a leképezés képe és mi a magja, és mik lesznek a mag szerinti mellékosztályok?

7. Legyen G a komplex számok csoportja az összeadásra nézve, H pedig a valósok csoportja az összeadásra nézve.
(a) Mik G-ben a H szerinti mellékosztályok?
(b) Melyik ismert csoporttal izomorf a G/H faktorcsoport?

8. (a) Szorozzuk össze a két permutációt és az eredményt írjuk fel ciklikus módon:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$
(b) Az S_7 hetedfokú szimmetrikus csoport egy eleme az $(12)(356)$ permutáció. Mi ennek az elemnek a rendje?
(c) Határozzuk meg az $(12)(345)(6789)$ permutáció inverzét!
(d) Írjuk fel diszjunkt ciklusok szorzataként az alábbi permutációt: $(123)(345)(567)(781)$!
(e) Mennyi az alábbi permutáció inverziószáma: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

9. A Cayley-tétel szerint D_4 milyen fokú permutációcsoporttal izomorf? Tudunk ennél jobbat mondani (azaz kisebb fokú permutációcsoportot, amivel D_4 izomorf)?

10. Bizonyítsuk be, hogy a $\varphi : G \to G$, $\varphi(h) = g^{-1}hg$ leképezés (g-vel való ***konjugálás***) a G csoportot önmagára képező izomorfizmus (ún. automorfizmus)!

11. Mutassuk meg, hogy egy $\varphi : G_1 \to G_2$ homomorfizmusnál
(a) G_1 egységelemének képe G_2 egységeleme;
(b) egy $g \in G_1$ elem inverzének képe g képének az inverze;
(c) φ magja normálosztó!

12. (a) Igazoljuk, hogy ha egy G csoportban minden a, b elemre teljesül, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, akkor G kommutatív!
(b) Legyen G egy csoport, a $\varphi : G \to G$ leképezés pedig $\varphi(g) = g^{-1}$. Igazoljuk, hogy ha φ homomorfizmus, akkor G kommutatív!

13. Bizonyítsuk be, hogy ha N_1 és N_2 a G csoport normálosztói, akkor a metszetük is az!

13. Feladatsor

1. Írjuk fel a $\mathbf{Z}_6$ (egészek mod 6) gyűrű szorzótábláját!

2. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha van olyan $y \neq 0$, melyre $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy $x_1 x_2$ is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

3. Legyen R egy nullosztómentes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) ha egy a elemre $a^2 = a$, akkor $a = 0$ vagy $a = 1$.
   (b) ha egy a elemre $a^k = 0$ (egy k egészre), akkor $a = 0$.
   (c) Mutassuk meg, hogy nem nullosztómentes gyűrűben a fentiek nem igazak!

4. Melyik alkot gyűrűt, és melyik alkot testet? (Ha más nem szerepel, akkor a két művelet az összeadás és a szorzás.)
   (a) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$,
   (b) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$,
   (c) azok a racionális számok, amelyek nevezője nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel,
   (d) $n \times n$-es, nem 0 determinánsú mátrixok,
   (e) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $a, b \in \mathbf{R}$,
   (f) egész együtthatós polinomok,
   (g) racionális együtthatós racionális törtfüggvények,
   (h) a valós függvények az összeadásra és a függvénykompozícióra, mint műveletekre nézve,
   (i) a kvaterniók.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden ferdetest nullosztómentes.

6. Adjuk meg annak a véges testnek a műveleti tábláit, amelyet úgy kapunk, hogy a $\mathbf{Z}_2$ testet bővítjük az $x^2 + x + 1$ polinom gyökével.