ANALÍZIS(2) Mérnök Informatikus szak | **VIZSGADOLGOZAT** | **2012. jan. 9.** Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3}{x}\, y = 3x^5 + x\,, \qquad x \neq 0$$

(H): $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú, ezért elegendő egy megoldás keresése.

$y' - \frac{3}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{3}{x}\, dx$

$\Rightarrow \ln y = 3 \cdot \ln x \Rightarrow y = x^3 = \varphi(x)$

Tehát $y_H = C \cdot x^3$; $C \in \mathbb{R}$ (5)

(I): $y_{ip} = c(x) \cdot x^3$ (1)

$y'_{ip} = c' \cdot x^3 + c \cdot 3x^2$

$c' x^3 + \underbrace{c\, 3x^2 - \frac{3}{x} c x^3}_{\equiv 0} = 3x^5 + x$

$\Rightarrow c' = 3x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow c(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

$y_{ip} = x^6 - x^2$ (4)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = Cx^3 + x^6 - x^2$ (2)

2. feladat (14 pont)

a) Definiálja az f függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát! Adjon elégséges feltételt a függvény és Taylor sorának megegyezésére!

b) $$f(x) = x \ \mathrm{ch}\,(5\,x^2)$$

Írja fel az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg konvergencia tartományát!

$f^{(101)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

a) $\boxed{6}$ (D) Legyen f akárhányszor deriválható $x_0 = 0$-ban. Ekkor a Taylor sora:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$ (3)

an20120109/1.

Elégséges tétel $f(x)=T(x)$ fennállására:

(T) Ha f akárhányszor differenciálható $(-R,R)$-en és $f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad x\in(-R,R)\text{-en} \qquad (3)$$

b.) $$\operatorname{ch} u = 1+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}\,; \qquad u\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=x\operatorname{ch} 5x^2 = x\sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{u^{2n}}{(2n)!}\right|_{u=5x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x^2)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{4n+1} \quad (4) \qquad x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ esetén: } \quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\Rightarrow f^{(101)}(0)=101!\,\underbrace{a_{101}}_{x^{101}\text{ együtthatója}} = 101!\,\frac{5^{50}}{50!} \qquad (3)$$

x^{101} együtthatója $(4n+1=101 \Rightarrow n=25)$

3. feladat (16 pont)

a) Mit értünk binomiális soron?
Bizonyítsa be a konvergenciasugárra tanult állítást!

b) Írja fel az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[6]{1+3x^2}}$$

függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor sorát és határozza meg a konvergenciasugarát!
$a_6=?$ (Elemi műveletekkel írja fel!)

a.) $\boxed{8}$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad \alpha\neq -1 \qquad (2)$$

(T) $R=1$ (1)

(B) $$a_k=\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$a_{k+1}=\binom{\alpha}{k+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}=\binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=\left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|\frac{0-1}{1+0}\right|=1=\frac{1}{R}\Rightarrow R=1$$

(5)

$\boxed{8}$ b.) $f(x) = (1+3x^2)^{-\frac{1}{6}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/6}{k} (3x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/6}{k} 3^k x^{2k}$ (4)

$|3x^2| = 3|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} = R$ (2)

$a_6 = \binom{-1/6}{3} 3^3 = \frac{-\frac{1}{6}\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 3^3$ (2)

4. feladat (16 pont)

a) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértéke létezésére tanult elégséges tételt!

b)

$$f(x,y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

Írja fel a függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját!

Van-e lokális szélsőértéke a $P_1(1,2)$, illetve az $P_2(1,-2)$ pontokban az alábbi függvénynek?

Megoldás:

a) (T) Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$$D(x,y) := \left|\underline{\underline{H}}(x,y)\right| \ \left(= \det \underline{\underline{H}}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték:

$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$: lok. min.

$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$: lok. max.

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges)

b.) $f'_x = 2 - \frac{4}{x^2y}$; $f'_y = 1 - \frac{4}{xy^2}$

$f''_{xx} = \frac{8}{x^3y}$; $f''_{xy} = \frac{4}{x^2y^2} = f''_{yx}$; $f''_{yy} = \frac{8}{xy^3}$ (6)

$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \frac{48}{x^4y^4}$

$f'_x(P_1) = 0$ és $f'_y(P_1) = 0$ és $D(P_1) > 0 \Rightarrow P_1$-ben van lok. szé. (4)

($f''_{xx}(P_1) > 0 \Rightarrow$ lok. min. van itt)

$f'_x(P_2) = 4 \neq 0 \Rightarrow P_2$-ben nincs lok. szé. (nem teljesül a szükséges feltétel)

an2o120109/3.

5. feladat (7+11=18 pont)*

a) $$\iint_T f\ \mathrm{d}T\,, \qquad T:\ x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0,\ \ y\le 2-x$$

Írja fel mindkét kétszeres integrált!

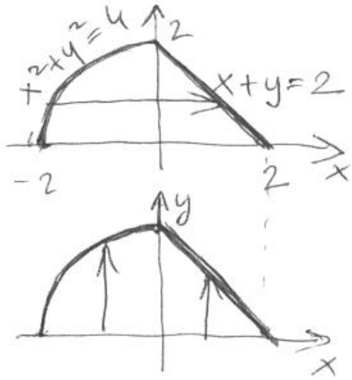
b) Számítsa ki az

$$z=12-(x^2+y^2) \quad \text{és a} \quad z=3$$

felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

a.) $\boxed{7}$

$$\iint_T f\,dT=\int_{y=0}^{2}\int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=2-y} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (3)$$

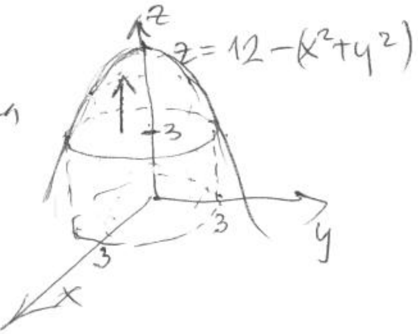


$$\iint_T f\,dT=\int_{x=-2}^{0}\int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx\ +$$

$$+\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx \qquad (4)$$

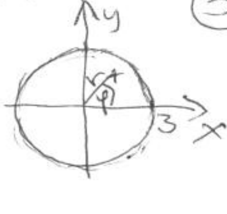
b.) $\boxed{11}$

$$\left.\begin{aligned} z&=12-(x^2+y^2)\\ z&=3\end{aligned}\right\}\ \underbrace{x^2+y^2=9}_{\text{metszésvonal}}\ \text{a } z=3 \text{ síkban}$$



$$\text{térf}=\iint_{x^2+y^2\le 9}\int_{z=3}^{12-(x^2+y^2)} 1\cdot dz\,dT=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 9} z\Big|_{z=3}^{12-(x^2+y^2)}dT=\iint_{x^2+y^2\le 9}\big(9-(x^2+y^2)\big)\,dT= \qquad (3)$$



$x=r\cos\varphi \qquad 0\le r\le 3$

$y=r\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

$|J|=r$

$$=\int_0^3\int_0^{2\pi}(9-r^2)\underbrace{r}_{|J|}\,d\varphi\,dr=(2\pi-0)\int_0^3(9r-r^3)\,dr= \qquad (5)$$

$$=2\pi\left(9\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3=2\pi\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right) \qquad (3)$$

(Hengerkoordinátás transzformációval is lehetett volna.)

an2v120109/4.

6. feladat (12 pont)*

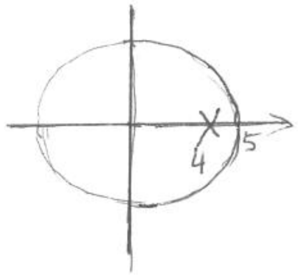
Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2}\,dz\,, \qquad I_2 = \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2}\,dz$$

reg T_1-en

$$I_1 = \oint_{|z-(-2)|=1} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2}\,dz = 0$$

Cauchy-féle alaptétel miatt (4)



reguláris mindenütt

$$I_2 = \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2}\,dz = \frac{2\pi j}{1!}\left(\operatorname{sh} jz\right)'\Big|_{z=4} = \quad (5)$$

$n+1=2$
$n=1$
$z_0=4$

(Cauchy-féle általánosított integrál-formula)

$$= 2\pi j\; j \operatorname{ch} jz\Big|_{z=4} = -2\pi \operatorname{ch} j4 = -2\pi \cdot \cos 4$$

$$\operatorname{Re} I_2 = -2\pi \cos 4\,;\quad \operatorname{Im} I_2 = 0 \quad (3)$$

7. feladat (12 pont)*

a) Vezesse le az $\ln z$ kiszámítására tanult képletet!

b) Adja meg az összes olyan komplex számot, melyre fennáll, hogy

$$e^z\,(e^{2z}+1)\,(z^2+16) = 0$$

a.) $\boxed{6}$

$w = \ln z$, ha $z = e^w$

$\Rightarrow |z|\, e^{j \operatorname{arc} z} = e^u \cdot e^{jv} \qquad \operatorname{arc} z \in [-\pi, \pi)$

$\Rightarrow e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$

és $v = \operatorname{arc} z$

Tehát $w = u + jv = \ln z = \boxed{\ln|z| + j \operatorname{arc} z}$, ahol $\operatorname{arc} z \in [-\pi, \pi)$

b.) $\boxed{6}$

$\underbrace{e^z = 0}_{\text{nincs ilyen } z}$ (1) vagy $\underbrace{e^{2z}+1=0}$ vagy $\underbrace{z^2+16=0}_{z=\pm 4j}$ (2)

$e^{2z} = -1$

$2z = \ln(-1) =$

$= \underbrace{\ln 1}_{=0} + j(-\pi + 2k\pi) =$

$\Rightarrow z = j\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{2}\right)$ (3)

an2v12010915.

8. feladat (9 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y^2+4)\ x}{x^2+5}$$

Szeparábilis d.e.

$$\frac{dy}{dx} = (y^2+4)\,\frac{x}{x^2+5}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \int \frac{x}{x^2+5}\,dx \quad 2$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{x^2+5}}_{f'/f}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\frac{1}{2}} \quad 3 \quad = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C \quad 3 \quad 1$$

9. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{3x}, \qquad x_0 = 1$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2+4x^2}, \qquad x_0 = 0$

a.) $$f(x) = e^{3x} = e^{3(x-1)+3} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3(x-1))^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3\cdot 3^n}{n!}(x-1)^n \quad 4 \qquad K.T.:\ (-\infty,\infty) \quad 1$$

b.) $$g(x) = \frac{1}{2+4x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-2x^2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n-1} x^{2n}$$

$$|q| = |-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K.T.:\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$