ANALÍZIS 1. **I. ZÁRTHELYI** **2012. október 11.**
Mérnök informatikus szak β-variáns Munkaidő: 90 perc

---

1. feladat (18 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.
b) A definíció alapján lássa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{4n^2+n} = \frac{1}{2}.$$

c) Konvergens-e az

$$a_n = \left(\frac{2n^2+3}{4n^2+n}\right)^n$$

sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ ha $n \geq N(\varepsilon)$.

3 pont

b) Legyen $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{2n^2+3}{4n^2+n} - \frac{1}{2}\right| =_{\mathbf{2p}} \left|\frac{4n^2+6-4n^2-n}{8n^2+2n}\right| \overset{n\geq 6}{=}_{\mathbf{2p}} \frac{n-6}{8n^2+2n} \leq_{\mathbf{2p}} \frac{n}{8n^2} = \frac{1}{8n} < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon) =_{\mathbf{2p}} \max\left(6, \left[\frac{1}{8\varepsilon}\right]\right)$

8 pont

c) A b) pont alapján létezik $N\left(\frac{1}{4}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N\left(\frac{1}{4}\right) \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \frac{2n^2+3}{4n^2+n} \leq \frac{3}{4}$ (**3 pont**), így $0 \leq a_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (**3 pont**) vagyis a rendőrelv értelmében (a_n) konvergens, és határértéke 0. (**1 pont**)

---

2. feladat (28 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+5n-3}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2-3n+1} - \sqrt[n]{n^2+5n-3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n^2+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n+1}$

---

a) $$\sqrt{2n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+5n-3} =_{\mathbf{2p}} \frac{2n^2-3n+1-(n^2+5n-3)}{\sqrt{2n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+5n-3}} =_{\mathbf{2p}}$$

$$= \frac{n^2}{n} \cdot \frac{1-\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}{\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_{\mathbf{2p}} \infty \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \infty$$

b) $1 \xleftarrow{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \overset{n\geq 3}{\leq} \sqrt[n]{2n^2-3n+1} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$1 \xleftarrow{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+5n-3} \leq \sqrt[n]{6n^2} = \sqrt[n]{6}(\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$, így

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2-3n+1} - \sqrt[n]{n^2+5n-3} = 1 - 1 = 0.$$

(Egy határérték **4p**, a másik plusz **2p**, a különbség **1p**)

c) $\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n^2+1} =_{\mathbf{4p}} \dfrac{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^{n^2}} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right) \xrightarrow{n\to\infty}_{\mathbf{2p}} \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}} \cdot 1 = e^2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n+1} =_{\mathbf{1p}} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right).$

c) alapján $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n^2} = e^2$, így minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $e^2 - \varepsilon \leq \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n^2} \leq e^2 + \varepsilon$, **3 pont**

így $1 \xleftarrow{n\to\infty} \sqrt[n]{e^2-\varepsilon} \leq \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n} \leq \sqrt[n]{e^2+\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ **3 pont**

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{n+1} = 1 \cdot 1 = 1.$ **2 pont**

---

3. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{n^3 + (-9)^n + 5^{n+1} + 3^{2n}}$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat?

Páros n esetén

$$9 = \sqrt[n]{9^n} \leq a_n = \sqrt[n]{n^3 + 5\cdot 5^n + 2\cdot 9^n} \leq \sqrt[n]{9^n + 5\cdot 9^n + 2\cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{8} \xrightarrow{n\to\infty} 9$$

3 pont

páratlan n esetén pedig

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leq a_n = \sqrt[n]{n^3 + 5\cdot 5^n} \leq \sqrt[n]{6\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{6} \xrightarrow{n\to\infty} 5.$$

3 pont

A sorozat torlódási pontjai tehát 5 és 9. **1 pont**

$\limsup a_n = 9 \neq \liminf a_n = 5$, tehát (a_n) nem konvergens. **3 pont**

---

4. feladat (16 pont)
Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén

$$a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 15}.$$

a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \dots$ esetén $3 < a_n < 5$.

b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $3 < 4 = a_1 < 5$.

II. $3 < a_n < 5 \Rightarrow 24 < 8a_n < 40 \Rightarrow 9 < 8a_n - 15 < 25 \Rightarrow 3 < \sqrt{8a_n - 15} = a_{n+1} < 5$. **5 pont**

b) Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. $a_2 = \sqrt{17} > \sqrt{16} = a_1$.

II. $a_n < a_{n+1} \Rightarrow 8a_n < 8a_{n+1} \Rightarrow 8a_n - 15 < 8a_{n+1} - 15 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{8a_n - 15} < \sqrt{8a_{n+1} - 15} = a_{n+2}$. **5 pont**

c) (a_n) monoton növő, és felülről korlátos, így konvergens. **2 pont**

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{8 \lim_{n\to\infty} a_n - 15} = \sqrt{8A - 15},$$

vagyis $A^2 - 8A + 15 = 0$, így a $A = 3$ vagy $A = 5$. **2 pont**

$a_n \geq 4$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 4$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. **2 pont**

---

5. feladat (11 pont)
Abszolút illetve feltételesen konvergens-e a

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+2} + (-5)^{n-1}}{3^{2n} + n}$$

sor?

A sor tagjai pozitívak, hiszen

$$2^{3n+2} + (-5)^{n-1} = 4 \cdot 8^n + (-1)^{n-1}\frac{1}{5} \cdot 5^n > 4 \cdot 8^n - \frac{1}{5} \cdot 5^n,$$

és $4 \cdot 8^n > \frac{1}{5} \cdot 5^n$. **4 pont**

Másrészt

$$\frac{2^{3n+2} + (-5)^{n-1}}{3^{2n} + n} \leq \frac{4 \cdot 8^n + \frac{1}{5} \cdot 5^n}{9^n + n} \leq 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{9}\right)^n,$$

továbbá $\left|\frac{8}{9}\right| < 1$ és $\left|\frac{5}{9}\right| < 1$, tehát a sor majorálható két konvergens mértani sor összegével, így a majoránskritérium miatt konvergens. **5 pont**

Pozitív tagú sorok abszolút konvergensek is. **2 pont**

---

6. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot.

b) Igazolja, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$$

konvergens. Mutassa meg, hogy ha $n \geq 9$, akkor az $s \approx s_n$ közelítés hibája 10^{-2}-nál kisebb.

---

a) A $\sum(-1)^n a_n$ sor Leibniz-típusú, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n > 0$, és a_n monoton csökkenően tart a 0-hoz. Ha $\sum(-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens. **5 pont**

b) A sor alternáló, és $n \ll 2^n$ miatt

$$\frac{n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

3 pont

tehát csak a monoton csökkenést kell vizsgálni.

$$\frac{n}{2^n} > \frac{n+1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow n2^{n+1} > (n+1)2^n \Leftrightarrow 2n > n+1 \Leftrightarrow n > 1.$$

A sor tehát Leibniz-típusú, így konvergens. **5 pont**

Leibniz-típusú soroknál $|s - s_n| < a_{n+1}$, és a monoton csökkenés miatt $a_{n+1} \leq a_{10}$, ha $n \geq 9$, így

$$|s - s_n| < a_{n+1} \geq a_{10} = \frac{10}{2^{10}} = \frac{10}{1024} < 10^{-2}.$$

4 pont

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (8 pont)
Konvergens-e az

$$a_n = \frac{n^{100} + 100^n + (n-1)!}{(n+1)! + 5^{2n}}$$

sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$$a_n = \frac{\frac{n^{100}}{n!} + \frac{100^n}{n!} + \frac{1}{n}}{(n+1) + \frac{25^n}{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

8 pont

---

8. feladat (12 pont)
Konvergensek-e a

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

sorok?

---

a) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} \neq 0$, vagyis nem teljesül a sor konvergenciájának szükséges feltétele, így nem konvergens. **6 pont**

b) $\dfrac{n}{n^3+1} \leq \dfrac{1}{n^2}$, vagyis majorálható egy konvergens sorral, így a majoránskritérium miatt konvergens. **6 pont**