# Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) — 1. Pót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{xy^2} = ?$

(b) Folytonos-e az origóban az $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^4+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$ függvény?

**Megoldás.** (a) Nem létezik, mert $y = x$ mentén $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1$, $y = 2x$ mentén pedig $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x^3}{4x^3} = \frac{1}{2}$.

(b) Igen, mert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^4+y^2}} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0 = f(0,0)$.

**2.** Mi az $f(x,y) = e^{2x+y}\ln y$ függvény $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ irányú iránymenti deriváltja a $(0,1)$ pontban?

**Megoldás.** $f$ parciális deriváltfüggvényei $f_x(x,y) = 2e^{2x+y}\ln y$ és $f_y(x,y) = e^{2x+y}\ln y + e^{2x+y}/y$ folytonosak az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ halmazon, ezért $f$ deriválható itt, és így az $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ irányú iránymenti deriváltja $(0,1)$-ben $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\nabla f(0,1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})(0,e) = e/\sqrt{2}$.

**3.** Határozza meg az $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és ezek jellegét.

**Megoldás.** $f_x(x,y) = y + 2 - 2/x = 0 = x - 1/y = f_y(x,y)$ egyetlen megoldása $P = (1/2, 2)$, tehát $f$-nek csak ebben a pontban lehet lokális szélsőértéke. A másodrendű parciálisok: $f_{xx}(x,y) = 2/x^2$, $f_{yy}(x,y) = 1/y^2$, $f_{xy}(x,y) = 1 = f_{yx}(x,y)$ folytonosak $P$ egy környezetében, és $f_{xx}(P) = 8$, $f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = 1$, mindkettő pozitív, ezért $f$-nek $P$-ben lokális minimuma van.

**4.** (a1) Van-e olyan $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz, amelynek minden pontja határpontja $H$-nak?

(a2) Lehet-e nyílt egy (a1)-ben leírt tulajdonságú halmaz?

(b) Mit értünk azon, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban?

(c) Van-e abszolút maximumhelye az $f(x,y,z) = e^{\sin(x\cos(y^2(1+\sin z^3)))}$ függvénynek az $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ halmazon?

(d) Ha $\underline{\underline{A}}$ az $A$ és $\underline{\underline{B}}$ a $B$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések mátrixai, mi az $x \mapsto A(Bx)$ lineáris leképezés mátrixa?

**Megoldás.** (a1) Igen, pl. $H = \{0\}$, mert a 0 minden környezete tartalmazza 0-t és valamilyen $x \neq 0$-t is.

(a2) Nem, mert nyílt halmaz minden pontja belső pont, tehát nem lehet határpont.

(b) $f$ parciális deriváltfüggvényei értelmesek $a$ egy környezetében és folytonosak $a$-ban.

(c) Igen, a Weierstrass-tétel miatt, mert $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ zárt, korlátos halmaz, amin $f$ folytonos.

(d) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$.

**IMSc-feladat.** Tegyük fel, hogy az $f$ deriválható valós függvény kielégíti az $f^7(x) + 3f(x) - 2xe^{3x} = 0$ egyenletet. Határozza meg $f$ szélsőértékhelyeit és azok jellegét!

**Megoldás.** Mivel $g(x,y) = y^7 + 3y - 2xe^{3x}$ folytonosan deriválható, és $g_y(x,y) = 7y^6 + 3$ sehol sem 0, ezért minden olyan $(x,y)$ pontra, amire $g(x,y) = 0$, van folytonos lokális megoldás, és annak $x$-beli deriváltja $\frac{-g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = \frac{2e^{3x}(1+3x)}{7y^6+3}$. Mivel $f$ is egy ilyen megoldás, ezért $f'(x) = \frac{2e^{3x}(1+3x)}{7y^6+3}$; ez csak $-1/3$-ban 0, és $x < -1/3$-ra negatív, $x > -1/3$-ra, tehát $f$-nek $-1/3$-ban lokális minimuma van.

## Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) 1. Pótpót ZH

Minden feladat 10 pontos, tehát összesen 40 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{xy^2} = ?$ (b) Hol folytonos az $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{ha } x = y \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$ függvény?

**Megoldás.** (a) Nem létezik, mert $y = x$ mentén $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2} = \infty$, $y = -x$ mentén pedig $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.
(b) Ha $x \neq y$, akkor $(x,y)$-nak van olyan környezete, ahol $f$ a konstans 0 függvény; tehát itt folytonos. Ha $x = y \neq 0$, akkor $f$ $(x,y)$ minden környezetében felvesz 0-t és $0 \neq x$-et is, tehát $f$ itt nem folytonos. $(0,0)$-ban folytonos, mert annak $\epsilon$ sugarú környezetében $|f(x,y)| \leq |x| < \epsilon$.

**2.** Legyen $f(u,v) = (u^2v^2, \frac{1}{uv})$, $g(x,y) = \ln x + \ln y$. Mi $f$ Jacobi-mátrixa az $(u,v)$ $(uv \neq 0)$, $g$ Jacobi-mátrixa az $(x,y)$ $(0 < x,y)$, és $g \circ f$ Jacobi-mátrixa az $(u,v)$ $(uv > 0)$ pontokban?

**Megoldás.** $f$ koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényei folytonosak az $\{(u,v) : uv \neq 0\}$ halmazon, ezért $f$ deriválható itt, és Jacobi-mátrixa $\begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ \frac{-1}{u^2v} & \frac{-1}{uv^2} \end{pmatrix}$; $g$ parciális derivált-függvényei folytonosak az $\{(x,y) : 0 < x,y\}$ halmazon, ezért $g$ deriválható itt, és Jacobi-mátrixa, azaz gradiense $\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$. A láncszabály miatt tehát $g \circ f$ is deriválható az $\{(u,v) : uv > 0\}$ halmazon, és ennek minden $(u,v)$ pontjában a deriváltja $g'(f(u,v))f'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2v^2} & uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ \frac{-1}{u^2v} & \frac{-1}{uv^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \end{pmatrix}$.

**3.** Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és ezek jellegét.

**Megoldás.** $f_x(x,y) = 2x - 2 = 0 = -2y + 4 = f_y(x,y)$ egyetlen megoldása $P = (1,2)$, tehát $f$-nek csak ebben a pontban lehet lokális szélsőértéke. A másodrendű parciálisok: $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = -2$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y)$ mindenütt folytonosak, és $f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P) = -4 < 0$, ezért $f$-nek $P$-ben nincs lokális szélsőértéke (nyeregpontja van).

**4.** (a) Igazak-e a következő állítások?
(a1) Ha $a$ torlódási pontja a $H$ halmaznak, akkor $a \in H$.
(a2) Ha minden $H$-beli konvergens $a_n$ sorozatra $\lim a_n \in H$, akkor $H$ zárt halmaz.
(a3) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \iff \exists \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$
(a4) $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pontosan akkor, ha $f$ minden $f_i$ koordinátafüggvényére igaz, hogy $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$.
(b)Definiálja az $f$ kétváltozós valós függvény $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$-beli, második változója szerinti parciális deriváltját!

**Megoldás.** (a1) Nem, pl. $\mathbb{R}$-ben $(0,1)$-nek torlódási pontja 0.
(a2) Igen, tétel volt, hogy ezek ekvivalensek.
(a3) Nem, a jobboldalnak nincs is értelme.
(a4) Igen, tétel volt, hogy ezek ekvivalensek.
(b) $g'(a_2)$, ahol $g(x) = f(a_1, x)$, beleértve, hogy akkor létezik, ha $g$ deriválható $a_2$-ben.

**IMSc-feladat.** Tegyük fel, hogy $f, g : H \to \mathbb{R}$, $H \subseteq \mathbb{R}^n$, $a$ belső pontja $H$-nak, $f$, $g$ deriválható $a$-ban és $g(a) \neq 0$. Mutassuk meg a láncszabály segítségével, hogy $\frac{f}{g}$ deriválható $a$-ban, és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$!

**Megoldás.** Az $(x,y) \mapsto \frac{x}{y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény minden $y \neq 0$-ra deriválható és $\nabla \frac{x}{y} = (\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2})$, mert $\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{y} = \frac{1}{y}$ és $\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{y} = \frac{-x}{y^2}$, tehát a parciális deriváltfüggvényei folytonosak. A láncszabály