4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mit mondhatunk az A és B halmazok viszonyáról, ha $(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\emptyset$.
MO. $A=B$, ugyanis $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=\emptyset \rightsquigarrow A\cap\overline{B}=\{x\in A\, x\notin B\}=\emptyset,$ ami viszont azt jelenti, hogy: $x\in A \rightsquigarrow x\in B,$ azaz $A\subseteq B$ és persze ugyanígy adódik az is, hogy $B\subseteq A$.

2. Legyenek (a_n) és b_n a következő sorozatok: $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$ tetszőleges $n\in\mathbf{N}$ esetén. Adjunk meg olyan (c_n) és (d_n) sorozatokat, ha vannak ilyenek, hogy (c_n) sűrűsödési értékei pontosan a_n elemei és (d_n) sűrűsödési értékei pontosan b_n elemei!
MO. c_n például a következő:
$$1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{3},\ \ldots\ldots$$
$$1+\frac{1}{k}, 2+\frac{1}{k}, 3+\frac{1}{k},\ldots, k+\frac{1}{k},\ 1+\frac{1}{k+1},\ldots$$
A feltételnek megfelelő d_n sorozat nem létezik, mert b_n egyetlen sűrűsödési értéke, a nulla is szükségképpen előfordul bármely olyan (x_n) sorozat sűrűsödési értékei között, melynek b_n összes eleme sűrűsödési értéke, hisz nullához bármilyen közel esik (b_n)–nek eleme, melyhez bármilyen közel van (x_n)–nek eleme. Másszóval, ha (x_n) sűrűsödési értékei (b_n) elemei, akkor (x_n) sűrűsödési értéke a nulla is, mely (b_n)–nek nem eleme.

3. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{n^2}=\,?\qquad \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n^2]{n}=\,?$

MO. $\sqrt[n]{n^2}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\longrightarrow 1^2=1,$ és csendőrelvvel $\sqrt[n^2]{n}$ is 1–hez tart mert $1\le\sqrt[n^2]{n}\le\sqrt[n^2]{n^2}\longrightarrow 1$ hiszen $\sqrt[n^2]{n^2}$ az

4. Legyen $f(x)=\ \operatorname{arctg} x$ és $g(x)=\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Adjon példát olyan (x_n) sorozatra, ha van ilyen, melyre $\lim_{n\longrightarrow\infty}x_n=0$ továbbá
a) $(f(x_n))$ konvergens és $(g(x_n))$ konvergens
b) $(f(x_n))$ divergens és $(g(x_n))$ divergens
c) $(f(x_n))$ divergens és $(g(x_n))$ konvergens
d) $(f(x_n))$ konvergens és $(g(x_n))$ divergens
MO. Átviteli elv alapján mivel f folytonos az origóban, míg g–nek ugrása van itt: a) $x_n=\frac{1}{n}$, b) c) ilyen nincs d) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}e^x\,\sin e^{-x}=\,?$

MO. $e^x\,\sin e^{-x}=\dfrac{\sin e^{-x}}{e^{-x}}$ és $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}e^{-x}=0,$ igy az $y=e^{-x}$ helyettesítéssel $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}e^x\,\sin e^{-x}=\lim\limits_{y\longrightarrow 0}\dfrac{\sin y}{y}=1.$ V

6. Ábrázolja vázlatosan az $f(x)=\dfrac{x}{x^3-1}$ függvényt legfontosabb jellemző értékeinek feltüntetésével!
MO.

7. Legyen $f(x)=\cos\dfrac{1}{\cos\frac{1}{x}}$. Létezik–e az alábbiak közül egy vagy több integrál?
$$\int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}}f(x)\,dx\ \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}}f(x)\,dx\ \int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{5}{\pi}}f(x)\,dx$$
MO. Igen, mind a három létezik, mert a) f korlátos és szakadási helyei az intervallum egy pontjában, az origóban torlódnak, b) f korlátos és az intervallum egy pontja kivételével folytonos, c) f folytonos az intervallumon.

8. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx=\,?$

MO. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}1\cdot\ln x\,dx=|x\cdot\ln x|_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}1\,dx==e+\frac{1}{e}-(e-\frac{1}{e})=\frac{2}{e}\,.$