ANALIZIS(1) **I. Zárthelyi.** β **variáns** **2006 okt. 19.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1) Feladat (10 pont).

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$?

b) A definíció alapján igazolja, hogy az alábbi sorozatnak van határértéke:

$$a_n = \frac{5n+3}{n+2}$$

a) $\boxed{2}$ Ⓓ $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$ $(\varepsilon\in\mathbb{R},\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^+)$,

hogy $|a_n-A|<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon)$ ②

b.) $\boxed{8}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\ \frac{5+\boxed{\frac{3}{n}}\to 0}{1+\boxed{\frac{2}{n}}\to 0} = 5 = A \ \textcircled{2}$$

$$|a_n-A| = \left|\frac{5n+3}{n+2}-5\right| \underset{\textcircled{1}}{=} \left|\frac{5n+3-5(n+2)}{n+2}\right| \underset{\textcircled{1}}{=} \left|\frac{-7}{n+2}\right| \underset{\textcircled{1}}{=} \frac{7}{n+2}\textcircled{1} < \varepsilon \ \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow n > \frac{7}{\varepsilon}-2 \ \textcircled{1} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{7}{\varepsilon}-2\right]$$

---

2) Feladat (10 pont). +1p.

(6p) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-2)^n+5^{n+1}}{2^{n+3}+5^{n-1}-3} = ?$$

(5p) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n^2+1}\right)^{3n^2} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-2)^n+5^{n+1}}{2^{n+3}+5^{n-1}-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-2)^n+5\cdot 5^n}{\underset{\textcircled{1}}{8\cdot 2^n}+\underset{\textcircled{1}}{\frac{1}{5}5^n}-3}\textcircled{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1/5)^n+(-2/5)^n+5}{8(2/5)^n+\frac{1}{5}-3(1/5)^n}\textcircled{2} = \frac{0+0+5}{0+\frac{1}{5}-0} = 25 \ \textcircled{1}$$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5}{n^2+1}\right)^{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{-5}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^3 \textcircled{2} = \left(\frac{e^{-5}\,\textcircled{1}}{e\,\textcircled{1}}\right)^3 = e^{-18} = \frac{1}{e^{18}} \ \textcircled{1}$$

Felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

z1B0610/1

3) Feladat (10 pont).

a) Írja le a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet!

b) Határozza meg az alábbi sorozat limeszét:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{7n+1}{2n+5}}$$

a.) Ⓣ Ha $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re (vagy $n > N_1$-re)

$\boxed{2}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

($A \in \mathbb{R}$)

b.)

$\boxed{8}$

$$\underbrace{\frac{1}{\underset{\searrow 1}{\sqrt[n]{7}}\ \underset{\searrow 1}{\sqrt[n]{n}}}}_{\downarrow 1 \text{ ①}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+5n}} \text{ ②} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{7n+1}{2n+5}} \leq \sqrt[n]{\frac{7n+n}{5}} \text{ ②} = \underbrace{\underset{\swarrow 1 \text{ ①}}{\sqrt[n]{\frac{8}{5}}} \cdot \underset{\searrow 1 \text{ ①}}{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow 1}$$

$$\xRightarrow[\text{rendőrelv ①}]{} a_n \to 1$$

Másik megoldás:

$$b_n := \frac{7n+1}{2n+5} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \frac{7+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}} \to \frac{7+0}{2+0} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{6}{2} < b_n < \frac{8}{2} = 4, \text{ ha } n > N_1 \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{3}} < a_n = \sqrt[n]{b_n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{4}}$$

$$\xRightarrow[\text{rendőrelv}]{} a_n \to 1$$

4) Feladat (08 pont). + 1p.

Határozza meg az alábbi sorozat limesz szuperiorját és a limesz inferiorját:

$$a_n = \frac{\sqrt{n} + n^4 \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{5n^4 + n^3 + 8}$$

Ha $n = 2k$ ①: $\sin n\frac{\pi}{2} = 0$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}}{5n^4+n^3+8} \text{ ①} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^4}}_{= \frac{1}{n^{7/2}} \to 0} \frac{1}{5 + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{8}{n^3}}} \to 0 \text{ ①}$$

Ha $n = 4k+1$: $\sin n\frac{\pi}{2} = 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}+n^4}{5n^4+n^3+8} = \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{=1} \frac{\frac{1}{n^{7/2}}+1}{5+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^3}} \to \frac{0+1}{5+0+0} = \frac{1}{5}$$ ②

Ha $n = 4k+3$: $\sin n\frac{\pi}{2} = -1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}-n^4}{5n^4+n^3+8} = \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{=1} \frac{\frac{1}{n^{7/2}}-1}{5+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^3}} \to \frac{0-1}{5+0+0} = -\frac{1}{5}$$ ②

$\overline{\lim}\, a_n = \frac{1}{5}$, ① $\underline{\lim}\, a_n = -\frac{1}{5}$ ①

5) Feladat (13 pont). +4p.

Legyen

$$a_{n+1} = 10 - \frac{24}{a_n}, \qquad a_1 = 12\,; \qquad (a_n) = (12,\ 8\,,\ 7\,,\ 6.57\,,\cdots)$$

rekurzíve adott sorozat. Mutassa meg, hogy
a) $a_n > 6$, minden $n \in \mathbb{N}$,
b) (a_n) monoton.
c) Indokolja meg, hogy (a_n) konvergens.
d) Határozza meg az (a_n) határértékét!

a.) Teljes indukcióval :

④ 1.) $a_1 > 6$

2.) Tegyük fel, hogy $a_n > 6$

3.) Igaz-e, hogy $a_{n+1} = 10 - \frac{24}{a_n} > 6$?

2.) miatt : $a_n > 6 \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{1}{6}$ $\quad | \cdot (-24) < 0$

$$-\frac{24}{a_n} > -4 \quad | +10$$

$$\underbrace{10 - \frac{24}{a_n}}_{= a_{n+1}} > 6$$

, tehát valóban $a_{n+1} > 6$

b.) Sejtés : (a_n) monoton csökkenő

④ Bizonyítása teljes indukcióval :

1.) $a_1 > a_2$ igaz

2.) Tegyük fel, hogy $a_{n-1} > a_n$

3.) $a_n = 10 - \frac{24}{a_{n-1}} \overset{?}{>} 10 - \frac{24}{a_n} = a_{n+1}$

Mivel 2.) miatt $a_{n-1} > a_n > 6 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{a_n} \quad | \cdot (-24) < 0$$

$$-\frac{24}{a_{n-1}} > \frac{-24}{a_n} \quad | + 10$$

$$a_n = 10 - \frac{24}{a_{n-1}} > 10 - \frac{24}{a_n} = a_{n+1}$$

Tehát valóban monoton csökkenő a sorozat.

c.) ② (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. ②

d.) ④ $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ kielégíti a rekurziós összefüggést.

$$A = 10 - \frac{24}{A} \text{ ② } \Rightarrow A^2 - 10A + 24 = 0$$

$\Rightarrow A_1 = 4$, $A_2 = 6$ lehet ① $\Rightarrow$ Esetünkben $A = 6$ ①
($a_n > 6$ miatt.)

6) Feladat (17 pont).

Abszolút vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6^n}{1 + n\, 6^n}$$

$\boxed{8}$ $|a_n| = \frac{6^n}{1+n6^n} \text{ ② } > \frac{6^n}{n \cdot 6^n + n \cdot 6^n} \text{ ① } = \frac{1}{2n}$; $\frac{1}{2} \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens ②

$\Rightarrow$ $\sum^{\infty} |a_n|$ divergens $\Rightarrow$ a sor nem abszolút konv. ①

minoráns kr. ②

$\boxed{9}$ Leibniz sor-e? Ehhez $|a_n| \searrow 0$ kell.

$$|a_n| = \frac{\frac{6^n}{6^n}}{\underbrace{\frac{6^n}{}}_{=0}} \quad \frac{1}{\underset{\downarrow \atop 0}{\left(\frac{1}{6}\right)^n} + \underset{\downarrow \atop \infty}{n}} \longrightarrow 0 \quad ③$$

$$|a_{n+1}| \overset{?}{<} |a_n| \qquad \frac{6^{n+1}}{1+(n+1)6^{n+1}} \overset{?}{<} \frac{6^n}{1+n6^n} \quad ①$$

$$6 \cdot \cancel{6^n} (1 + n\,6^n) \overset{?}{<} \cancel{6^n} (1 + (n+1)6^{n+1})$$

$5 \overset{?}{<} 6^{n+1}$ ② Ez pedig igaz.

Tehát Leibniz sor, így konv. ① A sor feltételesen konv. ④

7) Feladat (15 pont).

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sor konvergens és becsüljük meg azt a hibát, amit akkor vétünk, ha a sor összegét a tizedik részletösszeggel közelítjük:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}+3^n}{5^n+8^n}$$

$\boxed{9}$ $a_n = \frac{4\cdot 4^n+3^n}{5^n+8^n} \overset{}{<}$ ① $\frac{4\cdot 4^n+4^n}{8^n}$ ② $= 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$5\sum^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ① konv. geom. sor ② $\left(-1<q=\frac{1}{2}<1\right) \Rightarrow$ a sor konv

majoráns kr. ② (

$\boxed{6}$ $S \approx S_{10}$: $0 < H = \sum_{n=11}^{\infty} a_n$ ① $< 5\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ② $= 5\,\frac{(1/2)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$ ② $= 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ①

8) Feladat (07 pont).

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x+4}{x^4+2x^2+7} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x+4}{x^4+2x^2+7}\cdot\{x\} = ?$

a.) $\boxed{4}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x+4}{x^4+2x^2+7} = \lim\limits_{x\to\infty}$ ① $\underbrace{\frac{x^3}{x^4}}_{=\frac{1}{x}\to 0}$ ① ① $\underbrace{\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^4}}}_{\downarrow}$ $= 0$ ①

$\frac{1+0+0}{1+0+0} = 1$

b.) $\boxed{3}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x^3+x+4}{x^4+2x^2+7}}_{\downarrow\ 0} \cdot \underbrace{\{x\}}_{\text{korlátos}} = 0$ ②

①

9) Feladat (10 pont).

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha feltesszük, hogy x_0 az értelmezési tartomány torlódási pontja?

b) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 6} \sqrt{2x-3} = 3$$

---

a.) Ⓓ $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ $(\varepsilon, \delta(\varepsilon)\in\mathbb{R})$, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$, ha $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, $x\in D_f$

b.) $$|f(x)-A| = |\sqrt{2x-3}-3| = \left|(\sqrt{2x-3}-3)\frac{\sqrt{2x-3}+3}{\sqrt{2x-3}+3}\right| =$$

$$= \left|\frac{2x-3-9}{\sqrt{2x-3}+3}\right| = \frac{2|x-6|}{\sqrt{2x-3}+3} \leq \frac{2|x-6|}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $|x-6| < \frac{3\cdot\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon)$ és $2x-3\geq 0$ teljesül

z1B0610/6.